Исследование краевых задач для сингулярно-возмущенного уравнения высокого порядка [1]

И.В. Амирханов, Е.П. Жидков, Н.Р. Саркар, И. Сархадов, З.А. Шарипов

Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц является построение модели для единообразного описания спектра и формфакторов взаимодействия легких и тяжелых мезонов, так называемых кварткониев, рассматриваемых как связанные состояния кварка и антикварка. Тяжелые кварконии в некотором приближении успешно описываются нерелятивистской квантовой механикой — решение уравнения Шредингера на собственные значения [1]. При описании легких мезонов возникает необходимость учета релятивистских эффектов.

Релятивистское обобщение потенциальной модели кваркония приводит к решению спектральной задачи для уравнения Бете-Солпитера и для различных вариантов квазипотенциальных уравнений [2, 3].

В работе [4] проведено исследование уравнения

$$[E_\epsilon - H_\epsilon - V(r)]\,\psi(r) = 0, \tag{1}$$

$$E_\epsilon = \frac{2}{\epsilon^2}\left[\sqrt{1+\epsilon^2 q^2} - 1\right] = \frac{2q^2}{\sqrt{1+\epsilon^2 q^2}+1}, H_\epsilon = \frac{2}{\epsilon^2}\left[\mathrm{ch}\left(i\epsilon\frac{d}{dr}\right) - 1\right], \tag{2}$$

где ϵ — малый параметр. При $\epsilon \to 0$ это уравнение переходит в уравнение Шредингера.

Разлагая оператор $\mathrm{ch}\left(i\epsilon\frac{d}{dr}\right)$ в ряд, можно получить следующее дифференциальное уравнение бесконечного порядка:

$$\left[E_\epsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\epsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\epsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \ldots\right) - V(r)\right]\psi(r) = 0. \tag{3}$$

Если в уравнении (3) отбросить члены высших порядков, то в результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение конечного порядка:

$$\left[E_\epsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\epsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\epsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \ldots + \frac{2(-1)^{m-1}\epsilon^{2(m-1)}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dr^{2m}}\right) - V(r)\right]\psi(r) = 0, \tag{4}$$

где $2m$ — порядок уравнений ($m = 2, 3, 4, \ldots, M$).

Одной из важных особенностей уравнений (3) и (4) является наличие малого параметра при старших производных, то есть это сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения. Особую актуальность приобретают методы поиска таких решений $\{\psi_n, \lambda_n\}$ сингулярно-возмущенных краевых задач, которые сохраняют свои свойства, как для дифференциальных уравнений конечного порядка, так и для дифференциальных уравнений бесконечного порядка, если решение поставленной задачи существует.

[1] Работа поддержана РФФИ, гранты № 04-01-00490, № 03-01-00290.

Для дифференциальных уравнений высокого порядка $2m(m = 1, 2, 3, \ldots)$ необходимо поставить $2m$ краевых условий. Так как эти условия для уравнений (3) и (4), как правило, ставятся в двух точках $r = 0$ и $r = r_0$ (или $r \to \infty$), то количество возможных краевых задач $\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m}$ с увеличением порядка уравнения $2m$ сильно растет. Поэтому в дальнейшем будем исследовать краевые задачи, решения которых при $\epsilon \to 0$ переходят в решение уравнения 2-го порядка (уравнения Шредингера), т.е.

$$\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m} \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \{\psi_n, \lambda_n\}_2 \tag{5}$$

для любого фиксированного n. Тогда разность собственных значений $\Delta = |\lambda_{n,2m} - \lambda_{n,2}|$ можно интерпретировать как поправки (релятивистские поправки) к решению уравнения Шредингера.

Кроме того, важно исследовать поведение решений краевых задач $\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m}$ при фиксированном значении ϵ, но при возрастании порядка уравнений $2m$.

В работе аналитически и численно найдены решения различных краевых задач для уравнения высокого порядка с малым параметром при старших производных.

1. Найдены точные решения $\{\psi_n, \lambda_n\}$ краевой задачи с граничными условиями $\psi(0) = 0, \psi''(0) = 0, \ldots, \psi(r_0) = 0, \psi''(r_0) = 0, \ldots$ (а так же с граничными условиями $\psi(0) = 0, \psi''(0) = 0, \ldots, \psi'(r_0) = 0, \psi'''(r_0) = 0, \ldots)$ для уравнений 4-го, 6-го, ... бесконечного порядков. Для любого фиксированного значения n при $\epsilon \to 0$ эти решения переходят в решение уравнения Шредингера.

2. Для уравнения 4-го порядка с граничными условиями $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 0, \psi(r_0) = 0, \psi'(r_0) = 0$ численно найдено несколько решений (собственные значения и собственные функции) для различных значений ϵ. Доказано, что это уравнение с граничными условиями $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 0, \psi''(0) = 0, \psi(r_0)$ не имеет нетривиального решения.

3. Для уравнения 6-го порядка с граничными условиями $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 0, \psi''(0) = 0, \psi(r_0) = 0, \psi'(r_0) = 0, \psi''(r_0) = 0$ численно найдено несколько решений для различных значений ϵ. В отличие от уравнения 4-го порядка это уравнения с граничными условиями $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 0, \psi''(0) = 0, \psi'''(0) = 0, \psi^{IV}(0) = 0, \psi(r_0) = 0$ имеют нетривиальные решения, которые найдены численно.

4. Найденные решения с различными узлами ортогональны между собой.

Список литературы

[1] А.А. Быков, И.М. Дремин, А.В. Леонидов, УФН, **143** (1984), 3.

[2] A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento. **29** (1963), 380.

[3] В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касымов, Н.Б. Скачков, ЭЧАЯ, **2**, № 3 (1972), 637.

[4] И.В. Амирханов, Е.П. Жидков, Н.Р. Саркар, И. Сархадов, З.А. Шарипов, Вестник РУДН, Серия: Прикладная и компьютерная математика, **Т.4**, № 1, 2005.