Численное исследование некоторых решений релятивистского уравнения скалярных частиц в гравитационном поле точечного источника

Т.Л. Бояджиев[1], **Д.А. Георгиева**[2]
Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ
П.П. Физиев[3]
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова, ОИЯИ

Аналитические решения уравнений Эйнштейна для гравитационного поля точечной частицы голой механической массы M_0 описываются [1] при помощи обобщенных функций и имеют скачки в производных метрики в место нахождения частицы. Указанные решения зависят как от M_0, так и от кеплеровской массы M, или, что эквивалентно, от кеплеровской массы M и отношения масс $\varrho = M/M_0$. Величина $\varrho \in (0,1)$ задает гравитационный дефект масс точечного источника гравитационного поля и вместе с кеплеровской массой M является непосредственно измеряемой физической величиной.

Наличие массивного точечного источника приводит к необходимости рассматривать решения только на физическом интервале переменной яркости $\rho \in (\rho_0, \infty)$, где параметр $\rho_0 \geq \rho_G$, а ρ_G – радиус Шварцшильда. Такая процедура "обрезания" физического интервала переменной яркости ρ вытекает однозначно из существования материального точечного источника гравитационного поля. Физически она эквивалентна запрету иметь бесконечную яркость для точечных источников, что очевидным образом соответствует реальным наблюдениям и оставалось до сих пор без теоретического обоснования.

В работе [2] проведено численное изучение решений релятивистского уравнения Клейна–Гордона в гравитационном поле массивного источника в рамках ОТО. После стандартных математических преобразований приходим к следующей задаче Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2 P_l}{du^2} + \left[\varepsilon^2 - w_l(u)\right] P_l = 0\,, \quad u \in (u_0, \infty), \tag{1a}$$

$$P_l(u_0) = 0, \quad P_l(\infty) = 0\,, \tag{1b}$$

$$\int\limits_{u_0}^{\infty} P_l^2(u)\, du - 1 = 0\,. \tag{1c}$$

для радиальной волновой функции $P_l(u)$. Потенциал $w_l(u)$ зависит неявным образом от переменной u через решение задачи Коши

$$\frac{dg}{du} = g(1-g)^2\,, \quad g(u_0) = \varrho^2\,,$$

следующим образом

$$w_l(g) = g\left[\mu^2 + l\,(l+1)(1-g)^2 + (1-g)^3\right]\,.$$

[1]E-mail: todorlb@jinr.ru
[2]E-mail: danielag@jinr.ru
[3]E-mail: fiziev@phys.uni-sofia.bg

Граничные условия (1b) приводят к квантованию энергетических уровней связанных состояний: $\varepsilon = \varepsilon_{n\,l}$. Главное квантовое число $n = 0, 1, ...$ определяет число нулей волновой функции $P_{n\,l}(u)$ на интервале $u \in [u_0, \infty)$.

Для численного решения задачи на собственные значения (1) использовался алгоритм, основанный на непрерывном аналоге метода Ньютона. Решение возникающих на каждой итерации линеаризованных краевых задач находилось численно методом сплайн-коллокации. При численной реализации алгоритма полубесконечный интервал $[u_0, \infty)$ заменяется конечным интервалом $[u_0, u_\infty]$, где u_∞ — актуальная бесконечность. Влияние "хвоста" $u > u_\infty$ на результаты исследовалось численно при помощи метода установления.

Конкретный вид волновой функции $P_{n\,l}(u)$ при $n = 0$, $\varrho = 0.1$ и разных значениях l демонстрируется на Рис. 1. Как и следует ожидать, волновые функции $P_{n\,l}(u)$, соответствующие минимальному собственному значению дискретного спектра задачи Штурма–Лиувилля (1), не имеют нулей на интервале (u_0, ∞) и, следовательно, имеют в некоторой точке этого интервала максимум. Значение и локализация этого максимума существенно зависят от гравитационного дефекта масс, определяемым их отношением ϱ.

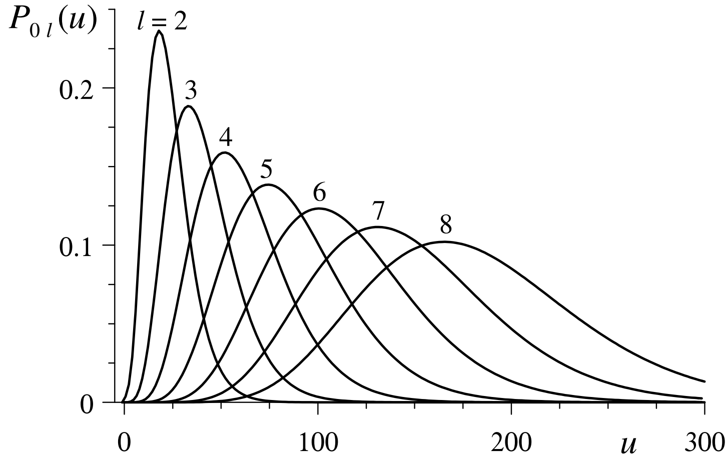

Рис. 1: Радиальная волновая функция $P_{0\,l}(u)$ для разных значений квантового числа $l = 2, 3, \ldots, 8$

Радиальные функции $P_{02}(u, \varrho)$ при разных значениях гравитационного дефекта массы, задаваемых отношением масс ϱ, показаны на Рис. 2. Видно, что в зависимости от значения ϱ для гравитационного поля источника волновая функция пробной скалярной частицы сосредоточена во внутренней (при малых ϱ) или во внешней (при больших ϱ) потенциальной яме. В некоторой промежуточной области наблюдается специфический непрерывный по переменной ϱ переходный режим.

Зависимость первых пяти собственных значений $\varepsilon^2_{0,1,2,3,4}$ от ϱ показана на Рис. 3 при $l = 2$. Хорошо видна характерная ступенчатая зависимость дискретных собственных значений ε^2_n от отношения масс ϱ. Количество ступенек для каждого n определяется количеством максимумов, которые с возрастанием ϱ прошли через переходный режим из внутренней ямы во внешнюю.

Нетрудно заметить, что такое нетривиальное поведение собственных значений уравнения Клейна–Гордона в поле точечного гравитационного источника связано с наличием двух конечных ям:

1. глубокая, но конечная внутренняя потенциальная яма, которая имеет размер порядка радиуса Шварцшильда;

2. внешняя яма, очень мелкая по сравнению с внутренней, в которой находится обычный мир ньютоновской гравитации.

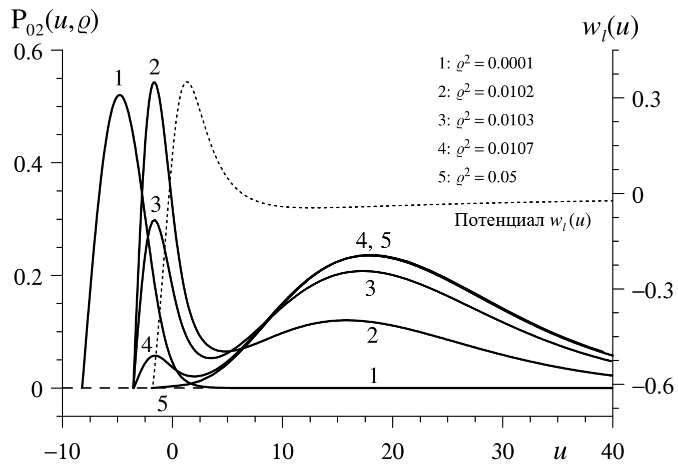

Рис. 2: Радиальные функции $P_{02}(u, \varrho)$ при разных значениях гравитационного дефекта массы

Ямы разделены между собой очень высоким потенциальным барьером, который извне представляется отталкивающим “центробежным” барьером, а изнутри — сдерживающим потенциальным барьером типа сферической потенциальной стенки. Наши численные результаты описывают квантовое прохождение под этим барьером, результат которого сильно зависит от гравитационного дефекта масс.

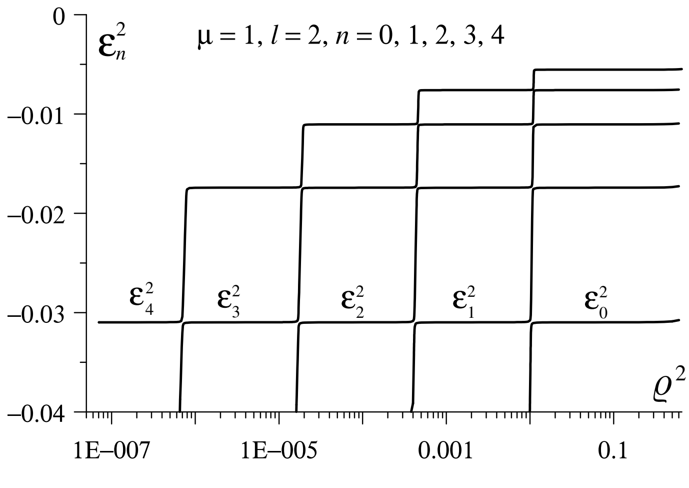

Рис. 3: Притяжение и отталкивание уровней ε_n при разных значениях дефекта массы источника гравитационного поля

В рассматриваемом случае конечная внутренняя яма играет роль капкана для пробных частиц. Возможно на этом пути удастся построить модель очень компактных материальных объектов размером порядка радиуса Шварцшильда и произвольно большой массы, у которых нет горизонта событий. Не исключено, что такого типа объекты представляют суть наблюдаемых компактных темных объектов в Природе и могут описать конечную стадию эволюции звезд без использования формальных конструкций типа черных дыр. Конечно, эти вопросы являются открытыми и нуждаются в дальнейшем серьезном изучении.

Наблюдается еще одно удивительное явление в дискретном спектре пробных частиц в гравитационном поле точечного источника, которое также связано с гравитационным дефектом массы – имеется отталкивание и притяжение (вплоть до квазипересечений) энергетических уровней ε^2 (см. Рис. 3). Такого типа поведение квантовых уровней хорошо известно в других физических областях, например в лазерной физике и в физике нейтринных осцилляций, но по видимому в теории гравитации наблюдается впервые.

Таким образом, требование конечности значений переменной яркости ρ приводит к принципиально новым физическим явлениям, изучение которых ставит новые интересные математические и физические задачи. В частности, в результате такого обрезания в рассмотренной задаче возникают дискретный спектр и связанные состояния.

Список литературы

[1] Fiziev P. Gravitational field of massive point particle in general relativity, gr-qc/0306088; Abdus Salam ICTP, Trieste, Italy: preprint IC/2003/122;
Fiziev P. On the solutions of Einstein equations with massive point source, gr-qc/0407088.

[2] Бояджиев Т.Л., Георгиева Д.А., Физиев П.П. Численное исследование некоторых решений релятивистского уравнения скалярных частиц в гравитационном поле точечного источника, gr-gc/0406036; ЖВМиМФ, 2005, т. 45, № 3, стр. 526-534.