

Обратная задача для дискретного эллиптического уравнения с предписанными условиями симметрии

С.И. Сердюкова

Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ

Многомерные обратные задачи представляют большой интерес для приложений в ядерной физике, геофизике, томографии и др. [1]. Многие физические процессы описываются уравнениями в частных производных, которые могут быть решены только численно. Разработан [2],[3] оригинальный численно-аналитический алгоритм для восстановления двумерного дискретного эллиптического уравнения:

$$\begin{aligned} & -(\kappa_{i+1/2,j}^1(u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \kappa_{i-1/2,j}^1(u_{i,j} - u_{i-1,j}))h_x^{-2} \\ & -(\kappa_{i,j+1/2}^2(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \kappa_{i,j-1/2}^2(u_{i,j} - u_{i,j-1}))h_y^{-2} + p_{i,j}u_{i,j} = \lambda u_{i,j}. \end{aligned}$$

Прямая задача решается в прямоугольнике $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$, с нулевыми граничными условиями $u_{0,j} = u_{M+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0$. Такая задача может возникнуть при численном моделировании волновых процессов в периодических средах [4],[5]. Предписанные условия симметрии позволяют продолжить дискретные собственные функции с прямоугольника на всю плоскость с сохранением "непрерывности первых производных", что очень важно для приложений. Задача сводится к блочной симметричной трчх-диагональной матрицы. Нами доказана Теорема симметрии, согласно которой при выполнении предписанных условий симметрии искомая матрица и все ее блоки симметричны относительно обеих диагоналей (являются персимметричными [6]). Доказано также, что при заданных условиях симметрии базисные собственные векторы искомой матрицы сохраняют все симметрии исходной матрицы, соответствующей $p_{i,j} = 0$ и $\kappa_{i\pm 1/2,j}^1 = \kappa_{i,j\pm 1/2}^2 = 1$. В результате спектр искомой матрицы разбивается на 4 непересекающихся множества Sp_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$. Нами получен явный вид полиномиальных уравнений $P_{ij}(\lambda) = 0$, определяющих элементы Sp_{ij} . Предлагаемый численно-аналитический алгоритм состоит в следующем: соответствующая персимметричная матрица, имеющая $L < MN$ различных элементов может быть восстановлена, по L заданным собственным значениям. Матричные элементы вместе с недостающими $MN - L$ собственными значениями находятся из решения полиномиальной системы, составленной из соотношений Виета для полиномов $P_{ij}(\lambda)$. Был разработан также алгоритм для вычисления базисных собственных векторов. Остановимся на одном из проведенных численных экспериментов: ($M = 5$, $N = 6$), восстанавливалась персимметричная пятидиагональная матрица 30-го порядка. 24 младших оригинальных собственных значений были возмущены: в каждом было сохранено 2 первых десятичных знака после запятой, остальные отброшены. 24 различных элемента матрицы и 6 недостающих собственных значений были найдены из решения системы 30 полиномиальных уравнений, соотношений Виета для коэффициентов полиномов P_{11} , P_{12} , P_{21} , P_{22} . Первые два 9-го порядка относительно λ , два других 6-го. Громоздкая система 30-и полиномиальных уравнений была вычислена с применением системы REDUCE [7]. При решении этой системы использовался пакет Г.Меленка NUMERIC [7]. Коэффициенты искомого дискретного эллиптического уравнения и элементы соответствующей персимметричной матрицы связаны простыми линейными соотношениями, из которых легко определяются $\kappa_{i\pm 1/2,j}^1, \kappa_{i,j\pm 1/2}^2, p_{i,j}$.

Предложенный алгоритм может быть использован для восстановления других дискретных уравнений с предписанными условиями симметрии. В частности были проведены расчеты потенциала двумерного дискретного уравнения Шредингера. Задача сводится к построению персимметричной пятидиагональной матрицы с постоянными (равными -1) внедиагональными элементами. Эта матрица имеет $L < MN$ различных диагональных элементов и может быть восстановлена по L заданным собственным значениям.

Список литературы

- [1] А.Г.Рамм - Многомерные обратные задачи рассеяния. Москва "Мир"1994. С.496.
- [2] С.И.Сердюкова. Обратная задача для дискретного эллиптического уравнения с предписанными условиями симметрии. ДАН, Математика, принята к печати, 9 стр.
- [3] С.И.Сердюкова. Обратная задача для дискретного эллиптического уравнения с предписанными условиями симметрии. Представлена для опубликования в материалах Международного совещания "Обработка изображений с применением методов математической физики и соответствующие обратные задачи", Норвегия, Осло, 8-12 августа 2005.
- [4] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский - Уравнения математической физики. Москва "Наука"1972. С.736.
- [5] Н.С.Бахвалов, Г.П.Панасенко - Осреднение процессов в периодических средах. Москва "Наука"1984. С. 355.
- [6] Ф.Р.Гантмахер - Теория матриц. Москва "Наука", 1967. С.576.
- [7] A.G.Hern REDUCE User's Manuel, Version 3.6: Rand, Santa Monica, 1995, CA, 90407-2138.