Численное исследование распада возмущенных стационарных решений системы уравнений Янга-Миллса с дилатоном с использованием технологии MPI

Э.А. Айрян[1], Т.Л. Бояджиев[1], Я. Буша[1,2], И. Покорны[1,2], О.И. Стрельцова[1], Д.А. Георгиева[3], Е.Е. Донец[4]

[1] *Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ*

[2] *Технический университет г.Кошице, Словакия*

[3] *Софийский университет, Болгария*

[4] *Лаборатория высоких энергий им. В.И. Векслера и А.М. Балдина, ОИЯИ*

Продолжено изучение процесса формирования сингулярности в решениях связанной системы уравнений Янга-Миллса с дилатоном (ЯМд).

В сферически симметричном случае дилатонное поле и поле Янга-Миллса (ЯМ) могут быть описаны двумя функциями $\Phi(t,r)$ и $f(t,r)$ соответственно, относительно двух переменных: времени t и радиальной координаты r. Система взаимодействующих полей Янга-Миллса с дилатоном описывается функционалом действия

$$S = -\int \left[\frac{1}{2}r^2{\Phi_r}^2 - \frac{1}{2}r^2{\Phi_t}^2 + e^{\Phi}\left({f_r}^2 - {f_t}^2 + \frac{(f^2-1)^2}{2r^2}\right)\right] dr\, dt. \tag{1}$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид:

$$f_{tt} + f_t\Phi_t - f_{rr} - f_r\Phi_r = \frac{f(1-f^2)}{r^2}, \tag{2a}$$

$$\Phi_{tt} - \Phi_{rr} - \frac{2\Phi_r}{r} = -\frac{e^{\Phi}}{r^2}\left(f_r^2 - f_t^2 + \frac{(f^2-1)^2}{2r^2}\right). \tag{2b}$$

При исследовании динамики нелинейных систем особую роль играют стационарные решения соответствующих нелинейных уравнений. Являясь точками локального экстремума функционала действия, такие стационарные решения также могут претендовать на роль глобальных или промежуточных аттракторов в соответствующей эволюционной задаче Коши.

Как было ранее установлено (G. Lavrelashvili and D. Maison. Phys. Lett.B, 1992, v. 295, p. 67–72.) система уравнений ЯМд имеет счетное множество стационарных решений, которые могут быть параметризованы через число нулей N функции ЯМ, эти решения неустойчивы, а число неустойчивых мод стационарного решения с N нулями функции ЯМ равно N. Для нахождения собственных неустойчивых мод (собственных функций и собственных значений) в качестве возмущений стационарного решения $f_N(r), \Phi_N(r)$ нами рассматривались сферически симметричные возмущения вида:

$$\begin{aligned} f(t,r) &= f_N(r) + \epsilon\, V_f(r)\, e^{i\omega t} = f_N(r) + \epsilon\, \exp(-\Phi_N/2)\, v(r)\, e^{i\omega t}, \\ \Phi(t,r) &= \Phi_N(r) + \epsilon\, V_\Phi(r)\, e^{i\omega t} = \Phi_N(r) + \epsilon\, \frac{\sqrt{2}}{r}\, u(r)\, e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{3}$$

где ϵ – малый параметр.

Устойчивость решений связана со спектром соответствующей задачи Штурма-Лиувилля: отрицательные собственные значения ($\omega^2 = \lambda < 0$) соответствуют неустойчивым модам исследуемых решений.

В работе [1] были получены собственные неустойчивые моды как решения матричной задачи Штурма-Лиувилля на полубесконечном интервале в самосопряженном виде:

$$-\Psi'' + U(r)\Psi - \lambda\,\Psi = 0\,, \tag{4}$$

на полуоси $0 < r < \infty$ с граничными условиями

$$\Psi_1(0) = 0\,, \quad {\Psi_2}'(0) = 0, \quad \Psi_1(\infty) = 0\,, \quad {\Psi_2}'(\infty) = 0 \tag{5}$$

и условием нормировки

$$I(\Psi) = \int\limits_0^\infty \Psi^+\Psi\,dr - 1 = \int\limits_0^\infty \left(\Psi_1^2 + \Psi_2^2\right)\,d\,r - 1 = 0, \tag{6}$$

где вектор собственных функций $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ (верхний индекс T обозначает транспонирование) связан с вектором возмущений $(u, v)^T$ (3) определенным преобразованием, а элементы 2-матрицы U выражаются через стационарное решение, неустойчивые моды которого ищутся.

С целью сравнения результатов также решалась несамосопряженная задача Штурма – Лиувилля [2]:

$$-\chi'' + P(r)\,\chi' + Q(r)\,\chi = \omega^2\chi\,, \quad 0 < r < \infty\,. \tag{7}$$

Здесь P и Q – 2-матрицы, причем P является антисимметрической.

Алгоритмы решения этих задач основывались на непрерывном аналоге метода Ньютона.

Для стационарных решений с $N = 1, 2, 3, 4$ были получены все собственные функции и собственные значения $\lambda_N^j, j = 1, \ldots, N$, которые представлены в Таб. 1. Как видно из этой таблицы, для решения, параметризованного через N, собственные значения быстро стремятся к нулевому значению снизу с увеличением j. Поэтому для стационарных решений с $N > 4$ были получены только основные собственные функции и собственные значения λ_N^1.

Таблица 1: *Собственные значения* $\{\lambda_N^j\}_{j=1}^N$.

N	λ_N^1	λ_N^2	λ_N^3	λ_N^4
1	-9.0566×10^{-2}			
2	-7.5382×10^{-2}	-2.0742×10^{-4}		
3	-4.9346×10^{-2}	-1.4957×10^{-4}	-1.9622×10^{-7}	
4	-4.3455×10^{-2}	-5.9905×10^{-5}	-1.3278×10^{-7}	$\sim -10^{-9}$

В работе [3] численно исследовалась нелинейная задача распада неустойчивых сферически симметричных стационарных решений в системе уравнений Янга-Миллса с дилатоном. Для изучения эволюции возмущенных стационарных решений решалась начально-краевая задача для система уравнений (2), в качестве начальных условий для функции ЯМ и дилатонной функции были рассмотрены возмущенные стационарные решения (3), когда *в качестве возмущений берутся собственные возмущения* (3) с различными значениями параметра ϵ. Вначале были рассмотрены основные возмущения: V_f^1, V_Φ^1, λ_N^1, которые и определяют время жизни данного неустойчивого стационарного решения и далее для стационарных решений с числом нулей функции ЯМ $N \geq 2$ были рассмотрены возмущения V_f^j, V_Φ^j, λ_N^j, $j = 2, \ldots, N$.

Одной из особенностей рассматриваемой задачи является быстрое смещение асимптотической области к большим значениям r с увеличением номера N и как следствие – большие массивы данных, возникающих из-за необходимости моделировать эволюцию на больших интервалах по пространственной координате $r \in [0, R_\infty]$. Отметим, что при малых значениях ϵ и с увеличением номера j рассматриваемого возмущения быстро увеличивается необходимое время счета. С целью уменьшения расчетного времени применялись параллельные вычисления с использованием нескольких процессоров. При решении уравнений с трехдиагональными матрицами, возникающих после соответствующей дискретизации исходной задачи были применены:

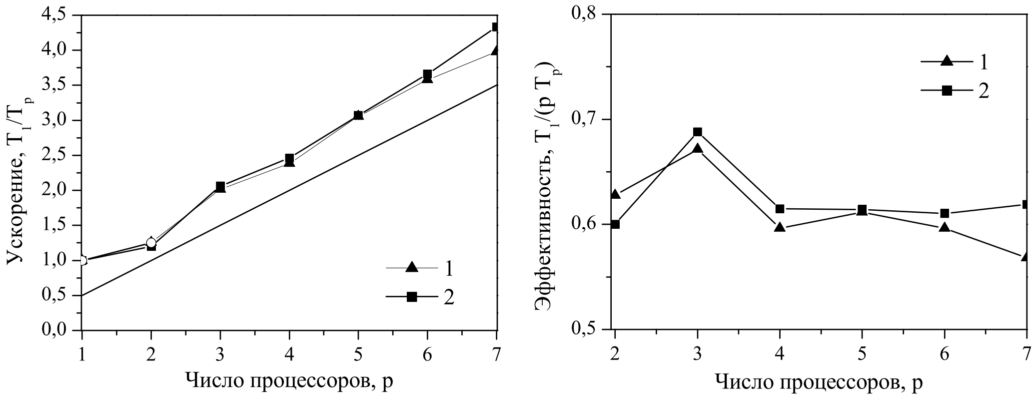
A) параллельная реализация метода встречных прогонок – этот метод эффективен для расчетов на двух процессорах;

B) метод разбиения системы на p групп, позволяющий проводить параллельные расчеты для произвольного числа p процессоров.

Для распараллеливания мы использовали технологию MPI (Massage Passing Interface). Чтобы оценить, насколько быстрее удается решить задачу при распараллеливании вводится понятие "ускорение" как отношение времени решения задачи на одном процессоре к времени решения той же задачи на системе из p таких же процессоров — T_1/T_p (Рис. 1). Параллельные вычисления проводились на кластере Лаборатории информационных технологий ОИЯИ с использованием процессоров p от 1 до 7. Было проведено исследование эффективности параллельных вычислений, которое показало, что ускорение расчетов порядка $p/2$.

Для всех рассмотренных стационарных решений было показано [3,4], что:

1. В начале эволюции решения описываются выражением для линейных возмущений (3) (линейный режим), время существования в линейном режиме увеличивается при возрастании N, j и при уменьшении значения параметра ϵ.
2. Для основных собственных возмущений $\{V_f^1, V_\Phi^1, \lambda_N^1\}$:
   - при $\epsilon > 0$ эволюционные решения описывают процесс рассеяния поля ЯМ по направлению к $r \to \infty$,
   - при $\epsilon < 0$ эволюционные решения описывают процесс формирования сингулярности.
3. Для собственных возмущений $\{V_f^j, V_\Phi^j, \lambda_N^j\}$, $j = 2, \ldots, N$ эволюционные решения описывают процесс формирования сингулярности.



а) б)

Рис. 1: Ускорение и эффективность расчетов при параллельных вычислениях

Тем самым было установлено, что стационарные решения образуют множество пороговых конфигураций, лежащих в функциональном пространстве решений на границе, разделяющей решения приводящие к формированию сингулярности и решения, остающиеся регулярными.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (№ РФФИ 04-01-00490, № 05-01-00645).

Список литературы

[1] O.I. Streltsova, E.E. Donets, E.A. Hayryan, D.A. Georgieva, T.L. Boyadjiev. *Unstable even-parity eigenmodes of the regular static SU(2) Yang-Mills-dilaton solutions.* Препринт ОИЯИ, E11-2004-151, 2004; ЖВМиМФ., 2005, т. **45**, № 5, с.925–937.

[2] D. A. Georgieva, O. I. Streltsova, E. E. Donets, E. A. Hayrian, T. L. Boyadjiev. *Calculation the eigenmodes of the regular static Yang-Mills-dilaton problem.* "Gravity, Astrophysics and Strings at the Black sea", Proceedings Second Advansed Research Workshop, Kiten, Bulgaria, June 10-16, 2004, pp. 137-149, Eds. P. Fiziev, M. Todorov, St. Kliment Ohridski University Press, Sofia, 2005.

[3] Э. А. Айрян, Я. Буша, Е. Е. Донец, И. Покорны и О. И. Стрельцова. *Численное исследование распада возмущенных стационарных решений системы уравнений Янга-Миллса с дилатоном с использованием технологии MPI.* Препринт ОИЯИ, P11-2004-183, 2004; Математическое моделирование, 2005, т. **17**, № 6, с. 103–121.

[4] О. И. Стрельцова. *Численное исследование процесса формирования сингулярностей в связанной системе уравнений Янга-Миллса с дилатоном.* Автореферат диссертации, Дубна, 2005.