Об идентификации гладких пространственных кривых

И.М. Гостев[1,2], **Л.А. Севастьянов**[2]
[1]*Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ*
[2]*Российский университет Дружбы народов, Москва*

Аннотация

At present, the problems of processing, analysis and identification of particles tracks become a high priority theoretical and research activity of many scientists both in Russia and abroad. First, the computing and measuring engineering have undergone essential modifications and reached a considerable success. Secondly, the amount of outcomes at carrying out investigation became so great that manual analysis carrying out, survey of slides, became simply physically impossible. Third the accelerating technique became so perfect, and in many cases compact, that it starts to apply in many application areas, such as medicine, agriculture, mechanical engineering, etc., that demands automation of all processes.

The methodology of shaping the informative properties of not closed space curves is considered and their intrinsic geometry based on several classes of $k-jet$ equivalence is explored. For identification of such curves, some types of metrics are introduced. A concept over small $k-jet$ equivalence, in connection with what some more metrics for small identification of curves and their segments, are introduced, is spotted. Examples and fields of applications are reduced, and the direction of further examinations is pointed.

Введение. В настоящее время задачи обработки, анализа и идентификации треков частиц вновь приобретают высокий приоритет в теоретической и исследовательской деятельности многих ученых, как в России, так и за рубежом. Важной особенностью при решении такого рода задач является получение результатов в режиме реального времени, то есть непосредственно по ходу проводимого эксперимента или выполняемой работы. Решение таких задач опирается на теорию обработки изображений и распознавание образов. Несмотря на то, что в ней известны конкретные решения аналогичных задач, все они являются частными случаями другой более общей и сложной проблемы. А именно, построение внутреннего описания некоторой пространственной кривой, такого, которое не изменяется при проективных и/или аффинных преобразованиях. Таким образом, основная цель заключается в выделении из функции системы признаков, инвариантных к определенной группе преобразований, и построение на их основе метрики для сравнения этих функций.

1. Внутренняя геометрия кривых. Рассмотрим в качестве примера некоторую кривую на плоскости. Под идентификацией будем понимать процесс сравнения двух групп признаков, выделенных из вещественных функций $f(t)$ и $g(t)$. Очевидно, что для выбранного типа кривой такие аффинно-инвариантные признаки необходимо искать на основе внутренних свойств, которыми она обладает.

Введем следующие понятия.

Определение 1.1. Пусть f и g являются k раз непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями на отрезке $[a, b]$. Назовем $k-jet$ нулями $j-$того порядка $(1 \leq j \leq k)$ функции f точки $t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, ..., t_{n_j}^{(j)}$, в которых $j-$тая производная функции f обращается в нуль: $f^{(j)}(t_r^{(j)}) = 0, r = 1, ..., n_j$.

Определение 1.2. Пусть вещественная функция$f(t)$, заданная на отрезке $[a, b]$ k–раз непрерывно дифференцируема. Обозначим через G_f множество, образованное точками, в которых $f^{'}(t) = 0$, $f^{''}(t) = 0, \ldots,$ $f^{(k)}(t) = 0$, и будем его называть множеством $k-jet$ нулей функции $f(t)$.

Определение 1.3. Если у k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ вещественных функций f и g совпадают все $k-jet$ нули всех порядков до $k-$того порядка включительно и, кроме того, значения функций f и g совпадают во всех $k-jet$ нулях, тогда мы будем говорить, что функции f и g являются слабо $k-jet$ идентичными на отрезке $[a, b]$.

Определение 1.4. Пусть f и g являются k раз непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями на отрезке $[a,b]$. Будем говорить, что они $k-jet$ идентичны на всем отрезке, если они $k-jet$ идентичны на любом открытом интервале отрезка $[a,b]$.

Рассмотрим n–мерные спрямляемые кривые L, параметризованные натуральным параметром s – длиной дуги кривой L. Каждая из них описывается ограниченной n–мерной вектор-функцией $\vec{r}(s)$, координаты которой $r_1(s),\ldots,r_n(s)$ являются функциями с ограниченной вариацией, а их первые производные $r_1'(s),\ldots,r_n'(s)$ являются непрерывными функциями.

Пусть имеется множество ограниченных n–мерных вектор–функций $\vec{r}(s)$ на отрезке $s\in[0,1]$. Введем на этом множестве структуру векторного (аффинного) пространства, индуцированную аналогичной структурой в области значений. В получившемся линейном пространстве определим метрику равномерной сходимости

$$\rho\left(\vec{f},\vec{g}\right)=\left\|\vec{f}-\vec{g}\right\|_C=\max_{s\in[0,1]}\left|\vec{f}(s)-\vec{g}(s)\right|. \quad (1)$$

Расстояние $\rho\left(f,f_m^n\right)=\|f-f_m^n\|_C$ между кривой и вписанной ломаной зависит от исходной кривой L_f и от степени $k-jet$ описания кривой, задающей мощность множества G_f^k.

Утверждение 1.1. Для каждого класса слабой $k-jet$ идентичности функций на отрезке $[a,b]$ существует единственная представляющая этот класс кусочно-линейная функция L, совпадающая со всеми функциями класса в $k-jet$ нулях и линейная на фрагментах $[t_i,t_{i+1}]$, принадлежащих множеству нулей $k-jet$.

2. Идентификация кривых Рассмотрим случай, когда мы хотим сравнить некоторую кривую L_f с эталонной кривой L_g, и имеющие описание в виде вектор функций $\widetilde{\vec{f}}(s)$ с длиной S_f и $\widetilde{\vec{g}}(s)$ с длиной S_g. Для каждой из функций f и g определим множества G_f и G_g их $k-jet$ нулей, которые формируют сетки (не обязательно совпадающие и возможно разной мощности) на отрезке $[0,1]$.

Определение 2.1 (области идентификации). Пусть для эталонной кривой $f=f(s)$ множество $G_f=\{a=x_0<x_1<,...,<x_l=b\}$ образовано l+1-точками, а для идентифицируемой кривой $g=g(s)-G_g=\{c=y_0<y_1<,...,<y_m=d\}$ содержит m+1-точку. Пусть $l>m$, то есть, предположим, что идентифицируемая кривая представляет собой фрагмент эталонной, в противном случае они поменяются местами. Если представить, что рассматриваемые кривые имеют псевдопериодичность, то необходимо доопределить G_s множеством точек того же размера, что и G_o следующим образом

$$G_s^*=x_0,x_1,...,x_l,x_{l+1}=x_l+x_1-x_0,...,x_{l+m}=x_l+x_m-x_0.$$

Другими словами будем рассматривать случай, когда $|G_f|^{=m}<|G_g|^{=k}$, т.е. множество $k-jet$ нулей кривой L_f меньше множества $k-jet$ нулей кривой L_g. При этом множество G_g необходимо доопределить до множества G_{gf} по правилу

$$|G_{gf}|=|G_g|+|G_f|-1 \quad (2)$$

Определение 2.2. Для некоторого множества нулей $k-jet$ $G=\{a=x_0<x_1<,...,<x_l=b\}$, зеркальным ему назовем множество $G_z=\{b=y_0=x_n,>y_1=x_{n-1}>,...,>y_n=x_0=a\}$.

Введем многомерную функцию разности с учетом возможных инверсий (отражений) в области значений функций f и g, следующим образом

$$\eta_{i,j}^k=|f_k\left(t_{i+j}\right)|-|g_k\left(\tau_i\right)|,\quad i=\overline{0,l-m},\quad j=\overline{0,m}$$

Из полученного набора можно либо сформировать линейную функцию разности первого типа – $\eta_{i,j}^{(1)}=\max\limits_{l=\overline{1,n}}\left|\eta_{i,j}^l\right|$, либо линейную функцию разности второго типа – $\eta_{i,j}^{(2)}=\frac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{n}\left|\eta_{i,j}^l\right|$.

Определим функции абсолютной ошибки идентификации первого и второго типа

$$\delta_i^q = \frac{1}{(m+1)} \sum_{j=0}^{m} \left| \eta_{i,j}^{(q)} \right|, \quad q = 1,2 \quad i = \overline{0,(k-m)},$$

и функции относительной ошибки идентификации первого и второго типа

$$\sigma_i^{(q)} = \frac{1}{(m+1)} \sum_{j=0}^{m} \left| \delta_i^{(q)} - \eta_{i,j}^{(q)} \right|, \quad q = 1,2 \quad i = \overline{0,(k-m)}.$$

Определение 2.3. Функцию распознавания для идентификации незамкнутых кривых на основе линейной корреляции первого типа (ЛК1) запишем как

$$\lambda_{LK1} = \begin{cases} 1, & (\rho_{LK1} < \varepsilon_{LK1}) \vee (\rho_{LK1}^z < \varepsilon_{LK1}) \ , \\ 0, & (\rho_{LK1} \geq \varepsilon_{LK1}) \wedge (\rho_{LK1}^z \geq \varepsilon_{LK1}) \,, \end{cases} \tag{3}$$

где $\rho_{LK1} = \min\limits_i \delta_i$ – метрика ЛК1, ρ_{LK1}^z – метрика ЛК1, вычисленная на зеркальном множестве $k - jet$ нулей объекта, а ε_{LK1} - классификационный допуск ЛК1. Равенство $\lambda_{LK1} = 1$ будет означать успешную идентификацию кривой, а i - сдвиг положения объекта относительно начала эталонной линии.

Определение 2.4. Функцию распознавания для идентификации незамкнутых кривых на основе линейной корреляции второго типа (ЛК2) запишем как

$$\lambda_{LK2} = \begin{cases} 1, & (\rho_{LK2} < \varepsilon_{LK2}) \vee (\rho_{LK2}^z < \varepsilon_{LK2}) \ , \\ 0, & (\rho_{LK2} \geq \varepsilon_{LK2}) \wedge (\rho_{LK2}^z \geq \varepsilon_{LK2}) \,, \end{cases} \tag{4}$$

где $\rho_{LK2} = \min\limits_i \sigma_i$ – метрика ЛК2, ρ_{LK2}^z – метрика ЛК2 второго типа, вычисленная на зеркальном множестве $k - jet$ нулей объекта, а ε_{LK2} - классификационный допуск ЛК2. Равенство $\lambda_{LK2} = 1$ будет означать успешную идентификацию объекта, а i - сдвиг положения объекта относительно начала эталонной линии.

Замечание 2.1. Если вероятность идентификации зеркально повёрнутых кривых исключается, то части формулы с зеркальной функцией ρ^z в (3) и (4) исключаются.

Реализация методов ЛК1 и ЛК2 аналогична методам геометрической корреляции, детально изложенных в [1] и [2].

3. Идентификация на сетках. Предложенные в данной работе методы идентификации пространственных кривых рассчитаны на случай обработки массивов данных в реальном масштабе времени. В случае, когда количество обрабатываемых кривых становится особенно большим, процедуру идентификации можно разбить на несколько последовательных этапов (см. метод последовательного взвешивания в [3]). При этом на начальном этапе будет выполняться более грубая классификация, а на последующих этапах используются более медленные и прецизионные методы.

В первом разделе было описано отношение слабой $k - jet$ эквивалентности. Для предварительной классификации кривых можно использовать еще более грубое отношение эквивалентности, которое будем называть сверхслабой $k - jet$ эквивалентностью. Для его определения проведем следующие построения.

В отличие от случая слабой $k - jet$ эквивалентности в качестве значений функции выберем расстояния между двумя соседними узлами множества G, а в качестве аргументов положение этих узлов. То есть, заменим F множеством $F^* = \left\{ f(t_i) = t_{i-1} - t_i, \ \ i = \overline{1, k+1} \right\}$, где значения аргумента принадлежат множеству G.

Для достижения инвариантности относительно линейных размеров кривых введем нормирующий множитель, который будет приводить суммарные длины рассматриваемых кривых к единице.

Воспользуемся методологией Определения 2.1 и обозначим “длины ординат” эталонной кривой как S_j^s, а идентифицируемой - S^o:

$$S_j^s = \sum_{i=1}^{m} \Delta t_{i+j}^s,\ j = \overline{0,(k-m)},\quad S^o = \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i^o.$$

Введем функцию относительного по–парного расстояния

$$\eta_{i,j} = \frac{\Delta t_{i+j}^s}{S_j^s} - \frac{\Delta t_j^o}{S^o},\quad i = \overline{0,k-m},\quad j = \overline{0,m},$$

где $\Delta t_{i+j}^s = t_{i+j+1}^s - t_{i+j}^s$, а $\Delta t_i^o = t_{i+1}^o - t_i^o$ (при отсутствии псевдопериодичности $i = \overline{0,k-m}$).

Запишем функции абсолютной ошибки идентификации на сетке

$$\delta_i = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} |\eta_{i,j}|,\quad i = \overline{0,(k-m)},$$

и - относительной ошибки идентификации на сетке:

$$\sigma_i = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} |\delta_i - \eta_{i,j}|,\quad i = \overline{0,(k-m)}.$$

Определение 3.1. Функцию распознавания для идентификации незамкнутых кривых на основе линейной сеточной корреляции первого типа (СК1) запишем как

$$\lambda_{NK1} = \begin{cases} 1, & (\rho_{NK1} < \varepsilon_{NK1}) \vee (\rho_{NK1}^z < \varepsilon_{NK1}) \ , \\ 0, & (\rho_{NK1} \geq \varepsilon_{NK1}) \wedge (\rho_{NK1}^z \geq \varepsilon_{NK1}) \,, \end{cases} \tag{5}$$

где $\rho_{NK1} = \min_i \delta_i$– метрика СК1, ρ_{NK1}^z– метрика СК1, вычисленная на зеркальном множестве $k-jet$ нулей объекта, а ε_{NK1} - классификационный допуск СК1. Равенство $\lambda_{NK1} = 1$ будет означать успешную идентификацию объекта, а i - сдвиг положения объекта относительно начала эталонной линии.

Определение 3.2. Функцию распознавания для идентификации незамкнутых кривых на основе линейной сеточной корреляции второго типа (СК2) запишем как

$$\lambda_{NK2} = \begin{cases} 1, & (\rho_{NK2} < \varepsilon_{NK2}) \vee (\rho_{NK2}^z < \varepsilon_{NK2}) \ , \\ 0, & (\rho_{NK2} \geq \varepsilon_{NK2}) \wedge (\rho_{NK2}^z \geq \varepsilon_{NK2}) \end{cases} \tag{6}$$

где $\rho_{NK2} = \min_j \sigma(j)$– метрика линейной сеточной корреляции второго типа, ρ_{NK2}^z – метрика линейной сеточной корреляции второго типа, вычисленная на зеркальном множестве $k-jet$ нулей объекта, а ε_{NK2} - классификационный допуск СК1. Равенство $\lambda_{NK2} = 1$ будет означать успешную идентификацию объекта, а j – сдвиг положения объекта относительно начала эталонной линии.

Замечание 3.1. Если вероятность идентификации зеркально повёрнутых кривых исключается, то части формулы с зеркальной функцией ρ^z в (5) и (6) исключаются.

4. Обсуждение. Внесенные в теорию распознавания образов отношения эквивалентности на основе множества $k-jet$ нулей для проведения процесса идентификации кривых открывают новые возможности работы с функциями.

Во-первых, такой подход делает возможным построение описания функций для их идентификации инвариантно к аффинным преобразованиям.

Во-вторых, появляется возможность распознавать не только форму кривых, но и относить функции к определенному классу, называемому слабо $k-jet$ эквивалентным или сверхслабо $k-jet$ эквивалентным. Причем описание класса можно получить априори путем расчета множества $k-jet$ нулей, а затем, контролируя поведение функций в этих точках, идентифицировать неизвестные кривые.

В-третьих, предложенные методы обладают определенной вариативностью относительно точности идентификации кривых, с точки зрения порядка используемых производных. Так, можно осуществлять постоянный контроль процесса на появление в нем определенной формы сигнала. Точность такого поиска будет определяться величиной классификационного допуска и порядком $k-jet$. С другой стороны, можно вырезать фрагмент кривой высокого порядка и искать по нему места, совпадающие с кубическими параболами. Такая ситуация возможна в тех случаях, когда часть функции утрачена, а по оставшимся фрагментам невозможно определить ее порядок.

В-четвертых, предложенные методы идентификации кривых являются чрезвычайно простыми в вычислительном отношении и могут проводиться в режиме реального времени.

К сожалению, обсуждаемая методология обладает и недостатками, среди которых необходимо отметить сложности вычисления производных высоких порядков и неустойчивость их поведения.

Заключение. Предложенная методология, опубликованная ранее в [4], обладает широким спектром применимости. Она может быть использована при анализе треков заряженных частиц, идентификации формы сигналов, распознавания фрагментов графических изображений (когда утрачена целостность формы контура) и во многих других областях науки и техники. Преимуществом этого подхода является инвариантность к аффинным преобразованиям и простота вычислений метрики, что позволяет использовать его в режиме реального времени.

Применение для идентификации кривых $k-jet$ методологии, дает возможность представления и распознавания, как плоских кривых, так и кривых в n-мерном пространстве. Это делает ее еще более актуальной и перспективной в научном и техническом аспектах.

Список литературы

[1] *Гостев И. М.* О методах распознавания графических образов // Изв. РАН ТиСУ 2004 №1.

[2] *Гостев И. М.* Об идентификации графических объектов по контурным функциям. // Изв. РАН ТиСУ 2005 №1. с.144-151.

[3] *Гостев И.М.* О принципах построения эталона в системах распознавания графических образов. // Изв. РАН ТиСУ 2004 №5. с.135-142.

[4] *Гостев И. М., Севастьянов Л.А.* Об идентификации гладких пространственных кривых.// Сообщения ОИЯИ, № Р11-2007-102, Дубна, 2007, 20 с.