

О конечно-элементном подходе относительно векторов поля для расчетов сложных магнитных систем экспериментальной физики ¹

О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева

Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ

Abstract

The arguments in behalf of solving nonlinear magnetostatic problems for field vectors are presented. The main among them is the accuracy of field calculation. In contrast to earlier known methods to solve the problems for field vectors, authors develop the approach based on a new class of finite elements. The distinctive property of the suggested elements is the base harmonic functions with approximations of an order higher than first and the node placements minimized the error of interpolation on the element boundaries.

В наиболее известных конечно-элементных программах, в том числе коммерческих системах автоматизированного проектирования, предназначенных для моделирования пространственных нелинейных магнитных полей, для получения системы нелинейных алгебраических уравнений используются скалярные или векторные потенциалы. Для последующего нахождения магнитного поля проводится процесс дифференцирования найденных в результате решения этой системы потенциалов. Для простоты изложения рассмотрим решение задачи Дирихле относительно скалярного потенциала u в параллелепипеде. Следуя [1], формулировку задачи запишем в виде

$$\begin{cases} \nabla u = 0, & 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c; \\ u|_{x=0} = f_1(y, z), & u|_{x=a} = f_2(y, z); \\ u|_{y=0} = f_3(x, z), & u|_{y=b} = f_4(x, z); \\ u|_{z=0} = f_5(x, y), & u|_{z=c} = f_6(x, y). \end{cases}$$

Решение задачи имеет вид:

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z),$$

где

$$u_1(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{1mn}(x, f_1, f_2, a, b, c) \sin \frac{\pi m}{b} y \sin \frac{\pi n}{c} z,$$

$$F_{1mn}(x, f_1, f_2, a, b, c) = \frac{(f_2)_{mn} \operatorname{sh} \nu_{mn}^{(1)} x + (f_1)_{mn} \operatorname{sh} \nu_{mn}^{(1)} (a - x)}{\operatorname{sh} \nu_{mn}^{(1)} a},$$

$$\nu_{mn}^{(1)} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}, \quad (f_i)_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^c f_i(y, z) \sin \frac{\pi m}{b} y \sin \frac{\pi n}{c} z dy dz, \quad i = 1, 2.$$

Функции u_2, u_3 вычисляются аналогично.

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ N 07-01-00738

Предположим, что на расчетной сетке с достаточной точностью вычисляется величина

$$u_1^h(x, y, z) \approx \sum_{m=1}^{m_1-1} \sum_{n=1}^{n_1-1} F_{1mn}(x, f_1, f_2, a, b, c) \sin \frac{\pi m}{b} y \sin \frac{\pi n}{c} z.$$

Тогда ошибка в вычислении u_1 будет

$$r_1(u_1) \approx \sum_{m=m_1}^{\infty} \sum_{n=n_1}^{\infty} F_{1mn}(x, f_1, f_2, a, b, c) \sin \frac{\pi m}{b} y \sin \frac{\pi n}{c} z$$

Отсюда для компонент поля получаем

$$H_{1,y}^h = \frac{\partial u_1^h}{\partial y}; \quad H_{1,z}^h = \frac{\partial u_1^h}{\partial z}.$$

Поэтому после дифференцирования потенциала ошибка в вычислении компонент поля получается в виде:

$$r_1(H_{1,y}^h) \approx \sum_{m=m_1}^{\infty} \sum_{n=n_1}^{\infty} \left(\frac{\pi m}{b}\right) F_{1mn}(x, f_1, f_2, a, b, c) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin\left(\frac{\pi n}{c} z\right);$$

$$r_1(H_{1,z}^h) \approx \sum_{m=m_1}^{\infty} \sum_{n=n_1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{c}\right) F_{1mn}(x, f_1, f_2, a, b, c) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \cos\left(\frac{\pi n}{c} z\right).$$

Как видим, ошибка $r_1(u_1)$ умножается на коэффициент $\pi m/b$ в формуле для $r_1(H_{1,y}^h)$ и - на коэффициент $\pi n/c$ в формуле для $r_1(H_{1,z}^h)$. Если указанные коэффициенты будут больше единицы, то ошибка вычисления возрастет. То есть при неудачной аппроксимации потенциала полученное поле может значительно отличаться от точного решения задачи [2]. Поэтому с целью исключения ошибки дифференцирования, на наш взгляд, является оправданным использование метода конечных элементов относительно векторов поля. Тем более, что при комплексном моделировании пространственных магнитных полей сложных магнитных систем, например, таких как в экспериментах ALICE [3] и PANDA [4], состоящих из двух и более влияющих друг на друга магнитов с различными конфигурациями ферромагнетиков и обмоток, необходимо знание именно поля во всей расчетной области. К тому же, для контроля точности аппроксимации наиболее естественным является подход, основанный на проверке поэлементной невязки уравнений магнитостатики для векторов поля (например, [5, 6]). Более того, многие важные характеристики магнитной системы выражаются через вектора магнитного поля и могут зависеть от квадрата модуля поля. Приведем формулы для вычисления основных характеристик магнитной системы.

1). Запасенная энергия магнитной системы:

$$W = \int_{\Omega_M} \int_0^{|\vec{B}|} |\vec{H}(|\vec{B}_1|)| d|\vec{B}_1| d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_A} |\vec{B}|^2 d\Omega;$$

2). Силы, действующие на проводники:

$$\vec{F}^{(i)} = \int_{\Omega_{S,i}} \vec{F} \times \vec{B} d\Omega;$$

3). Силы, действующие на магнитные части системы (Максвелловский стресс):

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_S [\vec{B}(\vec{B}\vec{n}) - \frac{1}{2}|\vec{B}|^2\vec{n}]dS;$$

4). Локальные индикаторы ошибки для конечно-элементного решения относительно двух скалярных потенциалов [6] в немагнитной области:

$$\eta_i = \frac{1}{|w_i|} \left| \int_{w_i} \frac{\nabla \cdot \vec{B}^{f,2}}{|\vec{B}^{f,1}|} dw \right|, \quad \vec{B}^{f,k} = \mu_0 \sum_{x_j \in w_i} \varphi_j \nabla N_j^{(k)}(x), \quad w_i \in \Omega_A,$$

где $k = 1$ для 8-ми узлового элемента и $k = 2$ для 27-ми узлового элемента; в магнитной области

$$\eta_i = \frac{1}{|\hat{w}_i|} \left| \int_{\hat{w}_i} \frac{\nabla \cdot \vec{B}^{int,2}}{|\vec{B}^{int,1}|} dw \right|, \quad \vec{B}^{int,2} = \sum_{j=1}^8 \vec{B}_j N_j^{(1)}(x),$$

$$\vec{B}^{int,1} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 \vec{B}_j, \quad w_i \in \Omega_F, \quad \hat{w}_i = \bigcup_{x_j \in w_i} \text{supp} N_j^{(1)}.$$

Естественно, что точность вычисления этих характеристик зависит от точности вычисления поля.

Вектор поля \vec{B} или \vec{H} обычно используется в качестве неизвестного при решении нелинейных задач магнитостатики с помощью интегральных уравнений (например, [7, 8, 9]). В методе конечных элементов эти неизвестные стали применяться с появлением смешанного метода (mixed method) а также реберных (edge) и граневых (facet) элементов. Среди первых работ, посвященных этому подходу, можно отметить [10, 11], из более поздних - публикации [12, 13]. Характерной чертой смешанного метода является решение системы из двух уравнений относительно скалярного и векторного неизвестных или двух векторов поля. В отличие от указанных исследований, авторами разрабатывается подход [14], основанный на использовании только одного векторного неизвестного и конечных элементов нового класса. Предлагаемые авторами конечные элементы характеризуются гармоническими базисными функциями для порядка аппроксимации выше первого, а также нестандартным расположением узлов, минимизирующим погрешность интерполяции на границах элементов. На рис. 1 показаны узлы для двумерных элементов второго, третьего и четвертого порядков аппроксимации. На рис. 2 показано поведение гармонических базисных функций для двумерного элемента второго порядка, а на рис. 3 - расположение узлов на гранях трехмерных элементов этого класса.

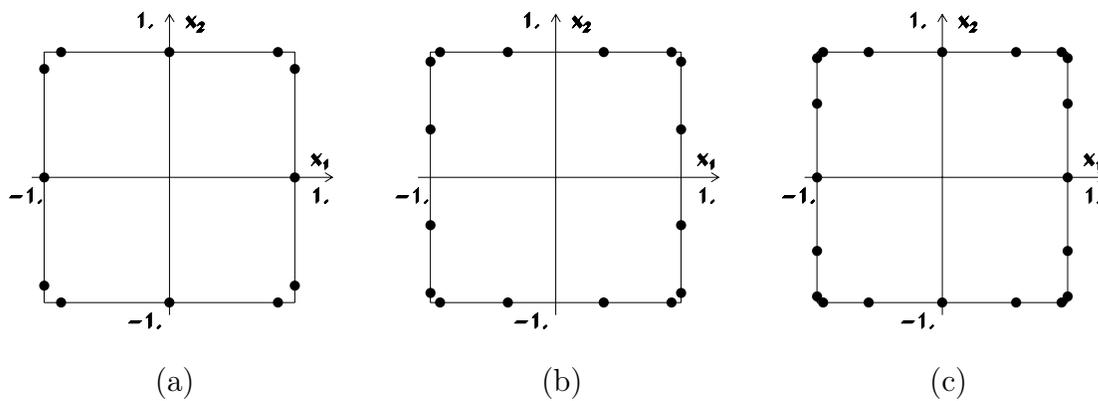


Рис. 1. Узлы двумерных элементов: (а) - для второго порядка, (б) - для третьего порядка и (с) - для четвертого порядка аппроксимации

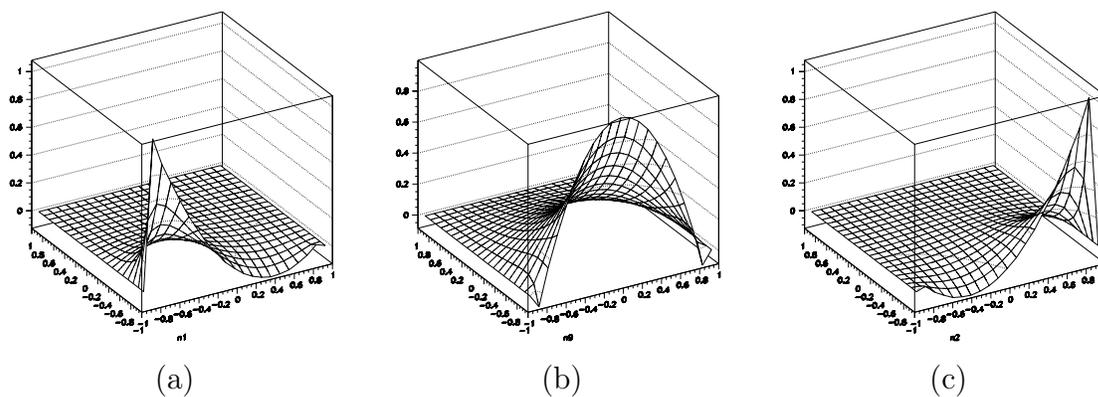


Рис. 2. Гармонические базисные функции для двумерного элемента второго порядка

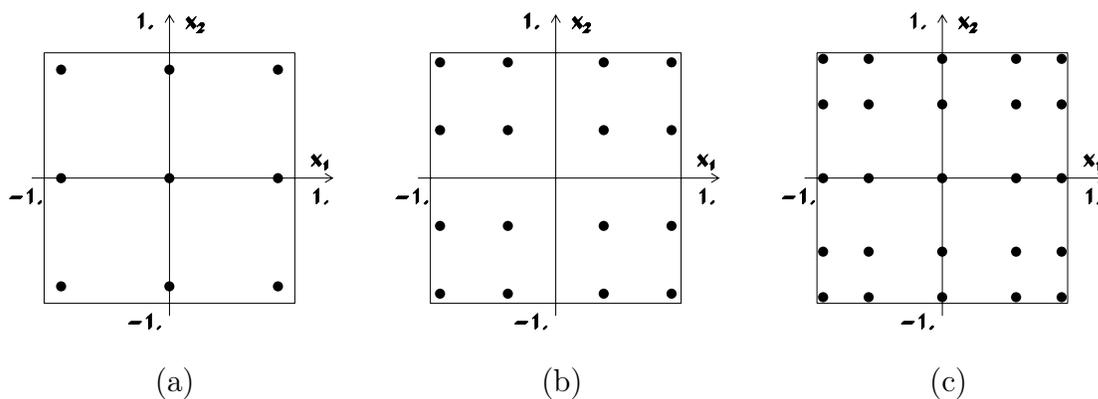


Рис. 3. Узлы на гранях трехмерных элементов: (а) - для второго порядка, (б) - для третьего порядка и (с) - для четвертого порядка аппроксимации

Список литературы

- [1] Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов. Сборник задач по математической физике. М., Наука, 1980.
- [2] А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979.
- [3] ALICE experiment. The forward muon spectrometer. CERN/LHCC 96-32, LHCC/P3-addendum 1, CERN, 1996, P.5-10; http://doc.cern.ch/tmp/convert_B00006298.pdf
- [4] PANDA Technical Progress Report. February 2005, P.255-299; <http://www.ep1.rub.de/~panda>.
- [5] J.Ritman, O.I.Yuldashev, M.B.Yuldasheva. An algorithm for construction of dipole magnets computer models with quality control and its application for the PANDA Forward Spectrometer, JINR, E11-2005-49, Dubna, 2005; [http://www1.jinr.ru/Preprints/2005/049\(E11-2005-49\).pdf](http://www1.jinr.ru/Preprints/2005/049(E11-2005-49).pdf)
- [6] Е.П.Жидков, О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. О контроле точности вычислений при моделировании пространственных магнитных полей. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Прикладная и компьютерная математика. 2005, т.4, N 1, С. 93-101.
- [7] P.G.Akishin, S.B.Vorozhtsov and E.P.Zhidkov. Calculation of the Magnetic field of the Isochronous Cyclotron Sector Magnet by the Integral Equation Method. Proc. Compumag Conf., Grenoble, 1978.
- [8] П.Г.Акишин. Применение метода объемных и граничных интегральных уравнений для моделирования магнитных систем, содержащих сверхпроводящие экраны. ЖВМ и МФ, т. 41, N 7, 2001, с.1106-1116.
- [9] J.Chavanne, O.Chubar, P.Elleaume. RADIA, a 3D Magnetostatic Computer Code, IMMW-12, ESRF, Grenoble, 2001; <http://www.esrf.fr/machine/support/ids/Public/Codes/Radia/Examples/List.html>
- [10] A.Bossavit. A rationale for “edge-elements” in 3D field computations. IEEE Trans. on Mag., v.24, N 1, 1988, p.74-79.
- [11] H.Kanayama, H.Motoyama, K.Endo, F.Kikuchi. Three-dimensional magnetostatic analysis using Nedelec’s elements. IEEE Trans. on Mag., v.26, N 2, 1990, p.682-685.
- [12] P.Alotto, I.Perugia. A field-based finite element method for magnetostatics derived from an error minimization approach. Int. J. for Num. Meth. in Eng., v.49, N 4, 2000, p.573-598.
- [13] V.Auchmann, S.Kurz, O.Rain, S.Russenschuk. Algebraic properties of BEM-FEM coupling with Whitney elements. COMPEL, v.24, Iss. 2, 2005, p.480-494.
- [14] О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Новый проекционно-сеточный подход для моделирования пространственных нелинейных магнитных полей сложных магнитных систем экспериментальной физики. Тезисы докладов международной конференции “Тихонов и современная математика”. Секция Математическое моделирование. М., МГУ, 2006, с.189-190.