Переходные $|nlm\rangle \to |\vec{p}\rangle$ формфакторы водородоподобных элементарных атомов

О.О. Воскресенская
Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ
С.М.-К. Бакмаев
Лаборатория теоретической физики, ОИЯИ

Аннотация

An new approach for calculation of transition form factors of hydrogen-like elementary atoms (EA) is proposed. The explicit expressions for bound-continuous transition form factors of EA are derived. It is shown that these form factors can be represented in the form of finite sum of terms with simple analytical structure and may be numerically evaluated with arbitrary degree of accuracy. As an application of the presented form factors, the calculation of the spectra of products from $A_{2\pi}$ ionization is considered.

Проблема вычисления формфакторов перехода из связанных в несвязанные состояния водородоподобных атомов имеет долгую историю.

В настоящее время эта проблема приобрела большое значение для интерпретации данных эксперимента DIRAC (ЦЕРН), целью которого является наблюдение водородоподобных ЕА и измерение их времени жизни с высокой степенью точности [1].

Главным образом, в литературе исследовались формфакторы перехода между состояниями дискретного спектра, характеризуемые определенными значениями главного (n), орбитального (l) и магнитного (m) квантовых чисел, что соответствует выбору волновых функций $\psi_{f(i)}(\vec{r})$ в виде

$$\psi_{f(i)}(\vec{r}) = \psi_{nlm}(\vec{r}) = Y_{lm}(\theta\phi)R_{nl}(r)\,, \tag{1}$$

где $Y_{lm}(\theta\phi)$ – сферические гармоники, $R_{nl}(r)$ – радиальные волновые функции, $|f\rangle$ – конечное, $|i\rangle$ – начальное состояния атома.

Формфакторы таких переходов всегда представимы в виде полиномов от переменной

$$u = \frac{\alpha^2\mu^2(n_i,n_k)}{\alpha^2\mu^2(n_i,n_k)+q^2}, \tag{2}$$

где

$$\mu(n_i,n_k) = \frac{\mu(n_i+n_k)}{n_in_k},$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

(здесь α – постоянная тонкой структуры, $m_{1,2}$ – массы элементарных частиц, составляющих ЕА), что позволяет производить их численный расчет практически с неограниченной точностью.

Традиционно указанная задача решалась путем разложения волновой функции конечного состояния в ряд по сферическим гармоникам

$$\psi^{(-)}_{\vec{p}}(\vec{r}) = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} i^{l_1}Y^*_{l_1m_1}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)\psi_{pl_1m_1}(\vec{r})\,, \tag{3}$$

$$\psi_{pl_1m_1}(\vec{r}) = Y^*_{l_1m_1}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)R_{pl_1}(r) \tag{4}$$

с последующим расчетом переходных формфакторов вида

$$S_{pl_1m_1,nlm}(\vec{q}) = \int \psi^*_{pl_1m_1}(\vec{r})e^{i\vec{q}\vec{r}}\psi_{nlm}(\vec{r})d^3r\,, \tag{5}$$

так что

$$S_{\vec{p},nlm} = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l_1}Y^*_{l_1m_1}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)S_{pl_1m_1,nlm}(\vec{q})\,. \tag{6}$$

Ясно, что в этом подходе может быть учтено лишь конечное число членов ряда (6), оставляя открытым вопрос об ошибке, допускаемой отбрасыванием остатка ряда с бесконечным числом слагаемых.

В настоящей работе эта трудность обойдена путем получения точных аналитических выражений для формфакторов переходов $|nlm\rangle \to |\vec{p}\rangle$ в терминах полиномов Гегенбауэра, что сводит задачу расчета этих формфакторов к конечному числу алгебраических операций. Приведем указанные выражения для частного $|n00\rangle \to |\vec{p}\rangle$ и общего $|nlm\rangle \to |\vec{p}\rangle$ случаев, а также расчитанный на их основе спектр продуктов ионизации атомов $A_{2\pi}$.

1. Аналитические выражения для формфакторов переходов $|n00\rangle \to |\vec{p}\rangle$. Используя представление волновой функции начального состояния в терминах полиномов Лагерра L_k^{λ}

$$\psi_{n00}(\vec{r}) \;=\; \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{n}\cdot e^{-\omega r}L^1_{n-1}(2\omega r) \tag{7}$$

$$\omega = \mu\alpha/n$$

и производящей функции

$$L_k^{\lambda}(x) = \Delta_z^{(k)}\left[(1-z)^{-(\lambda+1)}\exp\left(\frac{xz}{z-1}\right)\right]\,, \tag{8}$$

где оператор $\Delta_z^{(k)}$ определен соотношением

$$\Delta_z^{(k)}\left(f(z)\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{dz^k}f(z)\right)\bigg|_{z=0}\,, \tag{9}$$

а также интегрального представления для гипергеометрических функций и определения полиномов Гегенбауэра [2]

$$(1-2xz+z)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}C_k^{(\lambda)}(x)\cdot z^k\,, \tag{10}$$

получаем выражение для формфакторов перехода из nS-состояний дискретного спектра в состояния непрерывного спектра

$$S_{\vec{p},noo}(\vec{q}) \;=\; -2\sqrt{\pi}c^{(-)}\omega^{\frac{1}{2}}\cdot(\omega^2+\Delta^2)^{-1+i\xi}[(\omega-ip)^2+q^2]^{-i\xi} \tag{11}$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\xi\right)}{\Gamma\left(1-2i\xi\right)}\cdot\sum_{k=0}^{n}w^{k}C_{k}^{(i\xi)}(v)\cdot\left[\frac{\Gamma\left(n-k+1-2i\xi\right)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}-i\xi\right)}\times\right.$$

$$\left.\times P_{n-k}^{(-\frac{1}{2}-i\xi,\frac{1}{2}-i\xi)}(u)-\frac{\Gamma\left(n-k-2i\xi\right)}{\Gamma\left(n-k-\frac{1}{2}-i\xi\right)}\cdot P_{n-k-1}^{(-\frac{1}{2}-i\xi,\frac{1}{2}-i\xi)}(u)\right],$$

где $P^{(\lambda-\frac{3}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x)$ — полиномы Якоби [4].

Мы видим, что формфакторы $|nS\rangle \to |\vec{p}\rangle$ переходов выражаются в терминах классических полиномов и могут быть легко рассчитаны численно с произвольной точностью.

2. Аналитические выражения для формфакторов переходов $|nlm\rangle \to |\vec{p}\rangle$. Путем сведения задачи к вышерассмотренной, в общем случае получаем [5]:

$$S_{\vec{p},nlm}(\vec{q}) = 4\pi\cdot 2^{2l}i^{l}\omega^{l+1/2}\left[\frac{\Gamma(n-l)}{n\Gamma(n+l+1)}\right]^{1/2} \tag{12}$$

$$=\sum_{s=0}^{l}G_{lms}(\vec{p},\vec{q})H_{nls}(\vec{p},\vec{q})\cdot(\omega^{2}+\Delta^{2})^{i\xi+s-l-1}[(\omega-ip)^{2}+q^{2}]^{-s-i\xi};$$

$$G_{lms}(\vec{p},\vec{q}) = (-1)^{l-s}\frac{\Gamma(i\xi+s)}{\Gamma(i\xi-l+s)\Gamma(s+1)} \tag{13}$$

$$\times\sum_{l_1=s}^{l}\left[\frac{4\pi\Gamma(2l+2)}{\Gamma(2l_1+2)\Gamma(2l-2l_1+2)}\right]^{1/2}\cdot\frac{\Gamma(l_1+1)}{\Gamma(l_1-s+1)}q^{l_1}(-p)^{l-l_1}$$

$$\times\left[Y_{l_1}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right)\otimes Y_{l-l_1}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)\right]_{lm};$$

$$H_{nls}(\vec{p},\vec{q}) = (n+l)F_{n_1ls}(\vec{p},\vec{q})-(n-l)F_{n_2ls}(\vec{p},\vec{q}); \tag{14}$$

$$n_1=n-l-1\,,\quad n_2=n-l-2\,;$$

$$F_{n_{1(2)}ls}(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\Gamma(l-s+\frac{1}{2}-i\xi)}{\Gamma(2l-2s+1-2i\xi)}\sum_{k=0}^{n_{1(2)}}w^{k}C_{k}^{(i\xi+s)}(v) \tag{15}$$

$$\times\frac{\Gamma(n_{1(2)}-k+2l-2s+1-2i\xi)}{\Gamma(n_{1(2)}-k+l-s+\frac{1}{2}-i\xi)}\cdot P_{n_{1(2)}-k}^{(l-s-\frac{1}{2}-i\xi,l-s+\frac{1}{2}-i\xi)}(u)\,.$$

Формфакторы перехода из произвольных связанных состояний водородоподобных атомов в $\vec{p}$-состояния непрерывного спектра выражаются в виде суперпозиции конечного числа слагаемых с простой аналитической структурой и также могут быть рассчитаны численно с произвольной степенью точности.

3. Спектр продуктов ионизации атомов $A_{2\pi}$. Для интерпретации данных эксперимента DIRAC, наряду со значениями полных сечений перехода между связанными состояниями атома пиония, необходимы выражения для сечений переходов этих атомов из связанных состояний в состояния непрерывного спектра, характеризуемые определенным значением относительного импульса $\pi^+\pi^-$-системы $\vec{p}$ в несвязанном состоянии, и соответствующие распределения по величине и направлению указанного импульса. Последние используются для наблюдения атомов $A_{2\pi}/A_{\pi K}$ и измерения их времени жизни [1, 3].

В борновском приближении сечения переходов $|nlm\rangle \to |\vec{p}\rangle$ выражаются через найденные переходные формфакторы $S_{\vec{p},nlm}$ обычными соотношениями:

$$\sigma_{(nlm\to\vec{p})} = \int |U(\vec{q})|^2 \left[S_{\vec{p},nlm}\left(\frac{\vec{q}}{2}\right) - S_{\vec{p},nlm}\left(-\frac{\vec{q}}{2}\right)\right]^2 d^2q\,. \tag{16}$$

Здесь $U(\vec{q})$ – фурье-преобразование потенциальной энергии взаимодействия димезоатомов с атомами мишени.

Распределения по относительному импульсу могут быть рассчитаны в соответствии с формулами:

$$\frac{d^3\sigma_{(nlm\to\vec{p})}}{d^3\vec{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^2q\,\sigma_0(\vec{q})\left[S_{\vec{p},nlm}(\vec{p},\vec{q}_1) - S_{\vec{p},nlm}(\vec{p},\vec{q}_2)\right], \tag{17}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{q}m_1}{M}, \quad \vec{q}_2 = -\frac{\vec{q}m_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2, \tag{18}$$

$$\sigma_0(\vec{q}) = \left(\frac{2\alpha}{q^2}\right)^2 \left\{[Z - F_{el}(\vec{q})]^2 + ZF_{inel}(\vec{q})\right\}, \tag{19}$$

$$F_{el}(\vec{q}=0) = Z,$$

где $\sigma_{(nlm\to\vec{p})}$ – сечение перехода димезоатома из состояния $|nlm\rangle$ в континуум; $m_{1,2}$ – массы $\pi^\pm$ и $\pi^\mp/K^\mp$ мезонов; α – постоянная тонкой структуры; $F_{el}(\vec{q})$ and $F_{inel}(\vec{q})$ – упругий и неупругий формфакторы атомов мишени соответственно; Z – атомный номер атомов мишени.

Результаты соответствующих расчётов иллюстрируют Рис. 1,2. На указанных рисунках приведены распределения по импульсу (p) и углу (θ) между направлением движения димезоатомов и направлением относительного импульса пионных пар $\pi^+\pi^-$

$$\frac{d\sigma_{(nlm\to\vec{p})}}{d\theta dp} = 2\pi\sin\theta\, p^2 \frac{d^3\sigma_{(nlm\to\vec{p})}}{d^3\vec{p}}, \tag{20}$$

возникающих при диссоциации атомов $A_{2\pi}$ в исходных $1S$- (Рис. 1) и $10S$-состояниях (Рис. 2) в кулоновском поле атомов мишени [3, 5].

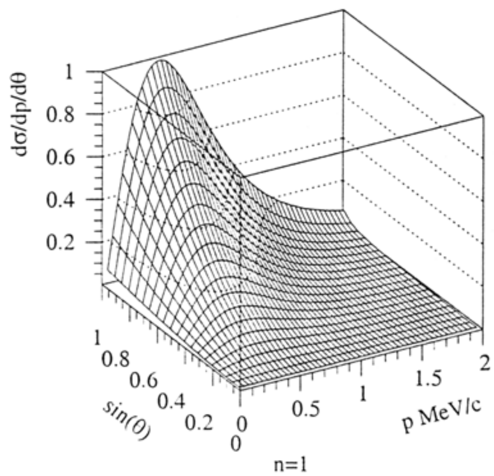

Рис. 1: Спектр пионов от ионизации атомов $A_{2\pi}^{1S}$

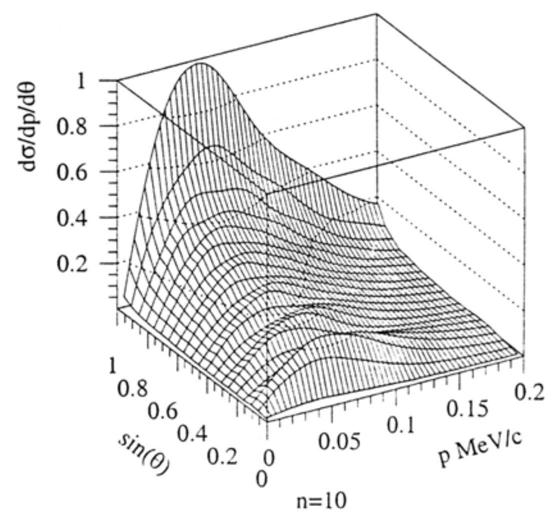

Рис. 2: Спектр пионов от ионизации атомов $A_{2\pi}^{10S}$

Список литературы

[1] B. Adeva et al., Phys. Lett. B **619**, 50 (2005) [hep-ex/0504044]; B. Adeva et al., J. Phys. G **30** 1929 (2004); B. Adeva et al., *Lifetime measurement of* $\pi^+\pi^-$ *atoms to test low energy QCD predictions* (Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95–1, SPSLC/P 284, Geneva, 1995).

[2] I.S. Gradshtein and I.M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products (Nauka Publication, Moscow, 1971); Handbook of Mathematical Functions, Eds. M. Abramowitz and I.A. Stegun (National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 1964).

[3] L. Afanasyev, A. Tarasov and O. Voskresenskaya, in: Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms *"HadAtom01"*, Bern, October 11-12, 2001 [J. Gasser, A. Rusetsky and J. Schacher, hep-ph/0112293].

[4] S. Bakmaev and O. Voskresenskaya, Part. Nucl. Lett. **3**, No. 6(135) 33 (2006).

[5] S. Bakmaev and O.Voskresenskaya, Вестник ТГУ. **302**, 97 (2007) [nucl-th/0610010].