

# Численное моделирование процесса переноса тепла и влаги в пористых материалах

И.В. Амирханов, Т.П. Пузынина, И.В. Пузынин, И. Сархадов

*Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ*

Э. Павлушова, М. Павлуш

*Технический университет, Кошице, Словакия*

## Abstract

In papers [1-3], in the framework of a nonlinear diffusion equation the process of transport of moisture in porous materials is investigated. However, the initial model leave outs dependence of transport of a moisture on temperature. In the paper [4] the cross-coupling of transport of heat and moisture in porous materials is investigated. The simulation of these processes is yielded on the basis of system of three nonlinear equations: heat conduction equation for temperature of a wet porous material and diffusion equations for concentrations of air and water. In these equations all thermal parameters of a porous material, dry air, water and vapors of water are entered. Thus temperature of all indicated constituents of medium is supposed to be identical.

Теория переноса энергии и вещества в капиллярно-пористом материале имеет большое применение в энергетике, в технологических процессах пищевой, строительной, химической и легкой промышленности, а также в агрофизике. В настоящее время для теоретического описания процессов тепло-влажноперееноса в капиллярно пористых средах используется система дифференциальных уравнений, полученная А.В. Лыковым [5], [6]:

$$C_{\Sigma} \frac{\partial T}{\partial t} - \varepsilon r \frac{\partial W_l}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + (C_l D_l \nabla W_l + C_l D_{T_l} \nabla T) \nabla T, \quad (1)$$

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial W_l}{\partial t} = \nabla(D_l \nabla W_l) + \nabla(D_{T_l} \nabla T). \quad (2)$$

Здесь  $C_{\Sigma} = C_s + W_l C_l$ ;  $T$ ,  $\lambda$  -соответственно температура и теплопроводность влажного тела;  $C_s$  - теплоемкость единицы объема сухого пористого тела;  $W_l$ ,  $C_l$ ,  $r$ ,  $D_l$ ,  $D_{T_l}$  - соответственно концентрация, удельная теплоемкость, удельная теплота испарения, коэффициент переноса жидкой влаги, коэффициент термодиффузии жидкости;  $\varepsilon$  - критерий фазового превращения, который определяется как отношение изменения влагосодержания посредством испарения и конденсации к изменению влагосодержания за счет переноса жидкости. Физический смысл каждого члена этих уравнений прост. Член  $\varepsilon r \frac{\partial W_l}{\partial t}$  в уравнении теплопроводности описывает плотность мощности поглощаемого ( $\frac{\partial W_l}{\partial t} < 0$ ) тепла вследствие испарения, а член  $(C_l D_l \nabla W_l + C_l D_{T_l} \nabla T) \nabla T$  - объемная мощность вносимой или выносимой потоком массы влаги. Т.е. добавляя в уравнение теплопроводности пористого тела источники тепла, которые возникают за счет испарения и переноса потока массы влаги посредством диффузии, получаем уравнение теплопроводности для влажного пористого материала. Второе уравнение - это уравнение диффузии влаги с учетом испарения и термодиффузии.

Как отмечено в [7], указанный подход позволяет существенно упростить систему дифференциальных уравнений, описывающую процессы тепло-влажноперееноса в капиллярно-пористых средах, но создает определенные трудности при их практическом применении, так как критерий фазового превращения  $\varepsilon$  является "фиктивным" физическим параметром.

Уравнения (1)-(2) были использованы в многочисленных теоретических работах по исследованию процессов тепло-влажноперевода в капиллярно пористых средах. Однако большое количество попыток корректно измерить полный набор коэффициентов, входящих в приведенные уравнения, для конкретного пористого тела давали весьма противоречивые результаты, что в первую очередь связано с принципиальной невозможностью измерить параметр  $\varepsilon$ .

В работе [7] предлагается следующая система уравнений для моделирования переноса тепла и влаги:

$$C_{\Sigma} \frac{\partial T}{\partial t} - r \frac{\partial W_l}{\partial t} = \lambda \Delta T + (k \nabla W_l + m \nabla T) \nabla T - r \nabla (D_l \nabla W_l + D_{T_l} \nabla T), \quad (3)$$

$$R \frac{\partial T}{\partial t} + Q \frac{\partial W_l}{\partial t} = \nabla ((D_{T_v} + D_{T_l}) \nabla T) + \nabla ((D_v + D_l) \nabla W_l), \quad (4)$$

где

$$C_{\Sigma} = C_s + W_l C_l + W_v C_v; \quad m = \frac{\partial \lambda}{\partial T} + C_v D_{T_v} + C_l D_{T_l}; \quad k = \frac{\partial \lambda}{\partial W_l} + C_l D_l + C_v D_v;$$

$$W_v = \rho_v \left( P - \frac{W_l}{\rho_l} \right); \quad \rho_v = \rho_v(T, W_l); \quad R = \frac{\partial \rho_v}{\partial T} \left( P - \frac{W_l}{\rho_l} \right); \quad Q = 1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} + \frac{\partial \rho_v}{\partial W_l} \left( P - \frac{W_l}{\rho_l} \right);$$

$P$  – пористость капиллярно-пористого тела;  $D_v, D_{T_v}, C_v, \rho_v$  – соответственно коэффициент переноса, коэффициент термодиффузии, удельная теплоемкость и плотность пара;  $\rho_l$  – плотность воды.

В системе (3)-(4) наличие влаги в виде пара и жидкости входит в формулу для пористости:

$$P = \frac{W_l}{\rho_l} + \frac{W_v}{\rho_v}. \quad (5)$$

Однако, в данной модели не учтено, что наряду с наличием влаги в виде паров и жидкости в пористом материале присутствует и воздух, и формула (5) при полном высушивании ( $W_l = W_v = 0$ ) теряет смысл.

В работе [4] моделирование переноса тепла и влаги проведено с учетом наличия воздуха, воды и ее паров в пористом материале. При этом использована следующая система уравнений [8]:

$$\frac{\partial W_v}{\partial t} = \nabla (D_v \nabla W + D_{T_v} \nabla T) + I, \quad (6)$$

$$\frac{\partial W_l}{\partial t} = \nabla (D_l \nabla W + D_{T_l} \nabla T) - I, \quad (7)$$

$$\frac{\partial W_a}{\partial t} = \nabla (D_a \nabla W + D_{T_a} \nabla T), \quad (8)$$

$$C_{\Sigma} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (\lambda \nabla T) - r I + (C_l D_l + C_v D_v + C_a D_a) \nabla W \nabla T + (C_l D_{T_l} + C_v D_{T_v} + C_a D_{T_a}) (\nabla T)^2 \quad (9)$$

$$P = \frac{W_l}{\rho_l} + \frac{W_v}{\rho_v} + \frac{W_a}{\rho_a}. \quad (10)$$

Здесь  $C_{\Sigma} = C_s + W_l C_l + W_v C_v + W_a C_a$ ,  $W = W_v + W_l + W_a$ , а  $W_a$ ,  $C_a$ ,  $D_a$ ,  $D_{T_a}$ ,  $\rho_a$  – соответственно концентрация, удельная теплоемкость, коэффициент переноса, коэффициент термодиффузии и плотность воздуха в пористом материале,  $I$  – скорость изменения концентрации паров, появляющихся в результате испарения жидкой влаги. Первые три уравнения описывают перенос влаги и воздуха, а уравнение (9) является уравнением теплопроводности для пористого тела с учетом переноса влаги, воздуха и испарения жидкой влаги. Как видно, уравнение (10) в отличие от (5) не содержит противоречия при полном сушении образца, т.е. при полном сушении весь объем пор будет занят воздухом. Как и в работе [7], суммируя уравнения (6), (7) и подставляя  $I$  из (7) в (9), получим:

$$\frac{\partial W_l}{\partial t} + \frac{\partial W_v}{\partial t} = \nabla(D_v \nabla W + D_{T_v} \nabla T) + \nabla(D_l \nabla W + D_{T_l} \nabla T), \quad (11)$$

$$C_{\Sigma} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + r \left( \frac{\partial W_l}{\partial t} - \nabla(D_l \nabla W + D_{T_l} \nabla T) \right) + \\ + (C_l D_l + C_v D_v + C_a D_a) \nabla W \nabla T + (C_l D_{T_l} + C_v D_{T_v} + C_a D_{T_a}) (\nabla T)^2 \quad (12)$$

Используя (10), исключим  $W_v$  из всех уравнений, т.е. получим систему уравнений для трех величин:  $T$ ,  $W_l$ ,  $W_a$ . Считаем, что плотности паров воды и воздуха зависят от температуры и от концентрации жидкой влаги т.е.  $\rho_v = \rho_v(W_l, T)$ ,  $\rho_a = \rho_a(W_l, T)$ . Тогда

$$W_v = \rho_v \left( P - \frac{W_l}{\rho_l} - \frac{W_a}{\rho_a} \right), \\ \frac{\partial W_v}{\partial t} = \left[ \frac{\partial \rho_v}{\partial T} \left( P - \frac{W_l}{\rho_l} - \frac{W_a}{\rho_a} \right) + \frac{\rho_v W_l}{\rho_l^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial T} + \frac{\rho_v W_a}{\rho_a^2} \frac{\partial \rho_a}{\partial T} \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \\ + \left[ \frac{\partial \rho_v}{\partial W_l} \left( P - \frac{W_l}{\rho_l} - \frac{W_a}{\rho_a} \right) + \frac{\rho_v W_a}{\rho_a^2} \frac{\partial \rho_a}{\partial W_l} - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right] \frac{\partial W_l}{\partial t} - \frac{\rho_v}{\rho_a} \frac{\partial W_a}{\partial t}.$$

После исключения получим систему:

$$R \frac{\partial T}{\partial t} + Q \frac{\partial W_l}{\partial t} = \nabla(D_l \nabla W + D_{T_l} \nabla T) + \nabla(D_v \nabla W + D_{T_v} \nabla T) + \frac{\rho_v}{\rho_a} \nabla(D_a \nabla W + D_{T_a} \nabla T), \quad (13)$$

$$C_{\Sigma} \frac{\partial T}{\partial t} - r \frac{\partial W_l}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) - r \nabla(D_l \nabla W + D_{T_l} \nabla T) + (C_l D_l + C_v D_v + C_a D_a) \nabla W \nabla T + \\ + (C_l D_{T_l} + C_v D_{T_v} + C_a D_{T_a}) (\nabla T)^2, \quad (14)$$

$$\frac{\partial W_a}{\partial t} = \nabla(D_a \nabla W + D_{T_a} \nabla T), \quad (15)$$

где

$$R = \frac{\partial \rho_v}{\partial T} \left( P - \frac{W_l}{\rho_l} - \frac{W_a}{\rho_a} \right) + \frac{\rho_v W_l}{\rho_l^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial T} + \frac{\rho_v W_a}{\rho_a^2} \frac{\partial \rho_a}{\partial T}, \\ Q = 1 + \frac{\partial \rho_v}{\partial W_l} \left( P - \frac{W_l}{\rho_l} - \frac{W_a}{\rho_a} \right) + \frac{\rho_v W_a}{\rho_a^2} \frac{\partial \rho_a}{\partial W_l} - \frac{\rho_v}{\rho_l}, \\ W = W_v + W_l + W_a = \rho_v P + \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right) W_l + \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_l} \right) W_a.$$

Система уравнений (13)–(15), при  $W_a = 0$  переходит в систему (3)–(4). Численное моделирование переноса тепла и влаги в капиллярно-пористых телах проводится после добавления в систему (13)–(15) начальных и граничных условий.

Следует подчеркнуть, что системы уравнений (1)–(2), (3)–(4) и (13)–(15) при  $T = const$  (изотермическое приближение), отсутствии испарения ( $r = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\rho_v = 0$ ) и воздуха ( $W_a = 0$ ) переходят в одно нелинейное уравнение диффузии для концентрации влаги  $W_l$ :

$$\frac{\partial W_l}{\partial t} = \nabla(D_l \nabla W_l). \quad (16)$$

Коэффициент переноса влаги в пористых материалах  $D_l(W_l, t)$  при данном приближении можно определить, используя экспериментально измеренные пространственные профили концентрации влаги в разные моменты времени. Экспериментальный метод определения пространственного распределения концентрации влаги в пористых материалах с помощью нейтронографии описан в работе [9]. На рис. 1 (правый) на основе данного метода для пористого образца с размерами  $3 \times 9 \times 12 \text{ см}^3$ , у которого все боковые поверхности, кроме одной, с размерами  $3 \times 12 \text{ см}^2$  водоизолированы приведены полученные профили концентрации влаги (в  $\text{г}/\text{см}^3$ ) вдоль ширины образца, равной 9 см.

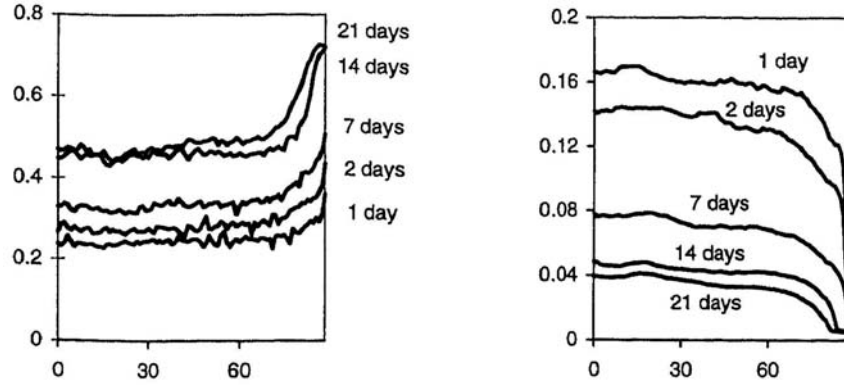


Рис. 1: Профили переноса нейтронов вдоль ширины образца при временах  $t = 1, 2, 7, 14$  и 21-й день (левый рисунок) и соответствующих распределений концентраций влаги (правый рисунок), полученных с помощью анализа преобразованных сигналов [9]

Уравнение (16) для данного образца переходит в одномерное нелинейное уравнение диффузии, которое в безразмерном виде имеет вид:

$$\frac{\partial W_l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(W_l, t) \frac{\partial W_l}{\partial x} \right], \quad t > 0, \quad 0 < x < 1. \quad (17)$$

Добавим к этому уравнению начальные и граничные условия:

$$W_l(x, 0) = W_{exp}(x, 0), \quad (18)$$

$$\frac{\partial W_l}{\partial x}(0, t) = 0, \quad -D(W_l(1, t), t) \frac{\partial W_l}{\partial x}(1, t) = \beta(W_l(1, t) - v_0), \quad t > 0, \quad (19)$$

Эти условия означают, что начальный профиль концентрации влаги совпадает с экспериментальным профилем концентрации влаги в первый день и на левой границе отсутствует поток влаги, а на правой границе поток влаги подчиняется закону Ньютона.

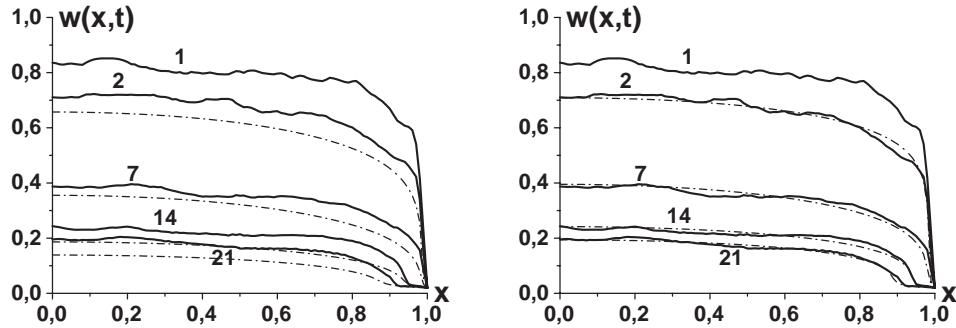


Рис. 2: Вычисленные (пунктирные линии) профили концентрации влаги для коэффициента переноса влаги с набором параметров, до (левый рисунок) и после минимизации по Ньютону (правый рисунок) для 2-го, 7-го, 14-го и 21-го дней ( $t = 0,05; 0,3; 0,65; 1$ ), и экспериментальные профили концентрации влаги (сплошные линии) в эти же дни

В работах [3],[10] путем решения обратной задачи диффузии с использованием экспериментально измеренные профили концентрации влаги определялись коэффициенты переноса влаги для данного пористого образца. В работах [1]-[2] на модельных задачах путем задания коэффициента переноса влаги в виде полинома третьей степени от концентрации влаги  $D(W_i) = D_0 + D_1W_i + D_2W_i^2 + D_3W_i^3$  моделировались “экспериментальные профили” влаги, а потом с помощью решения обратной задачи восстанавливался коэффициент переноса влаги (коэффициенты  $D_0, D_1, D_2, D_3$ ). Исследовались зависимости точного восстановления профили концентрации влаги от степени полинома и от количества экспериментальных дней. В работе [3] для определения коэффициента переноса влаги использовались реальные экспериментальные профили концентрации влаги которые приведены на рис. 1 (правый рисунок). При этом коэффициент переноса влаги выбирался в виде

$$D_i(W_i, t) = p_1W_i^{p(t)} + Ae^{-\mu(W_i-v_0)}, \quad p(t) = p_2 + p_3(1-t)^{p_4}. \quad (20)$$

Здесь  $p_i; i = 1, 2, 3, 4$ -неизвестные константы которые определяются путем минимизации функционала

$$S(P) = \sum_{j=1}^M \int_0^1 [W_i(x, t_j) - W_{exp}(x, t_j)]^2 dx, \quad (21)$$

$A = 1,5; \mu = 150; v_0 = 0,0196$ -константы которые определялись путем решения прямой задачи диффузии,  $M = 4$ -количество экспериментальных профилей влаги, по которым производится минимизация ( $t_1 = 0,05; t_2 = 0,3; t_3 = 0,65; t_4 = 1$ ). У нас количество экспериментальных профилей концентрации равно пяти, но профиль концентрации влаги в первый день используется как начальное условие, а по

остальным профилям проводится минимизация. На рис. 2 приведены профили концентраций влаги вычисленные для заданных коэффициентов переноса влаги (пунктирные линии) до минимизации функционала по методу Ньютона (левый рисунок,  $A = 1,5$ ;  $\mu = 150$ ;  $\beta = 1500$ ;  $v_0 = 0,0196$ ;  $p_1 = 60$ ;  $p_2 = 2$ ;  $p_3 = 3$ ;  $p_4 = 6$ ) и после минимизации (правый рисунок,  $A = 1,5$ ;  $\mu = 150$ ;  $\beta = 1500$ ;  $v_0 = 0,0196$ ;  $p_1 = 58.04141156180027$ ;  $p_2 = 2.64512132741103$ ;  $p_3 = 4.36381240906837$ ;  $p_4 = 7.64488257609989$ ) для 2-го, 7-го, 14-го и 20-го дней ( $t_1 = 0,05$ ;  $t_2 = 0,3$ ;  $t_3 = 0,65$ ;  $t_4 = 1$ ). Как видно, путем минимизации функционала по методу Ньютона можно найти оптимальные значения параметров при которых вычисленные профили с достаточно хорошей точности (для эксперимента) совпадают с их экспериментально измеренными результатами.

Планируется провести численные моделирования переноса влаги и тепла при неизотермических случаях с учетом фазового перехода влаги (испарение) и учета наличия воздуха в порах пористого материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 06-01-00228-а, № 03-01-00657, № 05-01-00645-а и VEGA, гранты 1/4003/07, 1/4198/07, 1/2647/05, ASO грант SK-0607-KE-001.

## Список литературы

- [1] И.В. Амирханов, Э. Павлушова, М. Павлуш, Т.П. Пузынина, И.В. Пузынин, И. Сархадов. Численное исследование модели испарения влаги в строительных материалах, Вестник РУДН, Серия Прикладная и компьютерная математика, том 4, №1, 2005, с. 96-106.
- [2] I.V. Amirkhanov, E. Pavlusova, M.Pavlus, T.P. Puzynina, I.V. Puzynin, I. Sarhadov. Application of gradient method to a moisture evaporation model. 10th Scientific Conference Rzeszow-Lviv-Kosice, 11-13 September, 2005, p. 6.
- [3] I.V. Amirkhanov, E. Pavlusova, M.Pavlus, T.P. Puzynina, I.V. Puzynin, I. Sarhadov. Numerical solution of an inverse problem for the moisture transfer coefficient in a porous material. //Materials and Structures. Accepted: 5 April 2007.
- [4] И.В. Амирханов, Э. Павлушова, М. Павлуш, Т.П. Пузынина, И.В. Пузынин, И. Сархадов. Численное моделирование процесса переноса тепла и влаги в пористых материалах. Научно-техническая конференция "Современные проблемы математического моделирования в физике, механике и управлении", 19-20 апреля 2007 года, ТвГУ, Тверь.
- [5] Лыков А.В. Тепло - и массообмен в процессах сушки. М.; Л.: ГЭИ, 1956.
- [6] Лыков А.В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.; ГИТТЛ, 1954.
- [7] О.Л. Решетин, С.Ю. Орлов. Теория переноса тепла и влаги в капиллярно-пористом теле. //Журнал технической физики, 1998, том 68, №2.
- [8] А.В. Лыков. Тепломассообмен. "Энергия", Москва, 1972 г., 560 с.
- [9] H. Pleinert, H. Sadouki, and F.H. Wittman. Determination of moisture distribution in porous building materials by neutron transmission analysis, Materials and Structures, Vol. 31, May 1998, pp. 218–224.
- [10] X. Wittman, H. Sadouki, and F.H. Wittman. Numerical Evaluation of Drying Test Data, Transactions of 10th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Techn., Vol. Q, 1989, pp. 71–79.