

# Решение краевых задач для сингулярно - возмущенных дифференциальных уравнений высокого порядка

И.В. Амирханов, Д.З. Музафаров, Н.Р. Саркар, И. Сархадов,  
З.А. Шарипов

*Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ*

## Abstract

Two boundary-value problems of the singular perturbed equation of 4-th order with small parameter  $\varepsilon$  at higher derivative are investigated for Coulomb and oscillator potentials. It is shown that at diminution of a small parameter value  $\varepsilon$  eigenvalues of both boundary-value problems converge to eigenvalues of Schrodinger equation. However, derivatives from eigenfunctions of first boundary-value problem, in against of the second boundary-value problem in a vicinity of a boundary  $r = 0$  ( $r$  - argument of eigenfunction), have a boundary layers and do not converge to derivatives of eigenfunctions of the Schrodinger equation. At increasing parameter  $\varepsilon$  from small up to final quantities the eigenfunctions of both boundary problems are expanding to the side of increasing of  $r$ . Thus eigenfunctions and eigenvalues of the first boundary-value problem are changing grossly in comparison with their values for the second boundary-value problem. The equidistance property of eigenvalues of the Schrodinger equation with the oscillator potential does not conserve for the 4-th order equation.

## Введение

В данной работе, как и в предыдущих исследованиях [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение [1] в релятивистском конфигурационном пространстве. В частности, для случая  $S$  - волны ( $l = 0$ ) исходное уравнение имеет вид:

$$[E - H - V(r)]\psi = 0,$$

где

$$E = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[ \sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} - 1 \right], \quad H = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[ ch \left( i\varepsilon \frac{d}{dr} \right) - 1 \right],$$

$H$  - релятивистский гамильтониан,  $V$  - квазипотенциал,  $\varepsilon$  - малый параметр. Разлагая оператор  $ch \left( i\varepsilon \frac{d}{dr} \right)$  в ряд, можно получить дифференциальное уравнение бесконечного порядка. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  это уравнение переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера.

Если в разложении отбросить члены высших порядков, то получим обыкновенные дифференциальные уравнения конечного порядка:

$$\left[ E + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} - \dots + \frac{2(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dr^{2m}} - V(r) \right] \psi(r) = 0, \quad (1)$$

где  $2m$  - порядок уравнений ( $m = 2, 3, 4, \dots, M$ ).

Одной из важных особенностей уравнений (1) является наличие малого параметра при старших производных. Такие уравнения носят название сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений.

В предыдущих работах [7, 8] аналитическим и асимптотическим методами проводились исследования различных краевых задач для уравнений 4-го и 6-го порядков для прямоугольной потенциальной ямы с глубиной  $V_0$  и шириной  $r_0$ :

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (2)$$

В настоящей работе численно исследуется уравнение 4-го порядка для кулоновского и оцилляторного потенциалов:

$$V(r) = -\frac{2}{r}; \quad (3)$$

$$V(r) = r^2. \quad (4)$$

### Краевые задачи для уравнения 4-го порядка

Рассмотрим уравнение (1) при  $m = 2$

$$-\mu^2 \frac{d^4 \psi}{dr^4} + \frac{d^2 \psi}{dr^2} + [2\bar{E} - V(r)]\psi(r) = 0; \quad \mu^2 = \frac{\varepsilon^2}{12}, \quad 2\bar{E} = -E, \quad (5)$$

со следующими граничными условиями:

$$\psi(0) = 0; \quad \frac{d\psi(0)}{dr} = 0; \quad \psi|_{r=r_0} = 0, \quad (6)$$

$$\psi(0) = 0; \quad \frac{d^2\psi(0)}{dr^2} = 0; \quad \psi|_{r=r_0} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (5) с граничными условиями (6) будем называть первой краевой задачей, а с граничными условиями (7) - второй краевой задачей.

При численном решении краевых задач, перепишем уравнение (5) в виде системы двух уравнений 2-го порядка и используем непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН) [9, 10] и сплайн-коллокационную схему [11, 12]. При использовании НАМН (при малых значениях параметра  $\varepsilon$ ) в качестве начального приближения берется решение уравнения Шредингера, а потом найденные решения будут служить начальными приближениями для следующих значений параметра  $\varepsilon$ , т.е. дальше решения краевых задач определяются методом продолжения по параметру.

При решении краевых задач для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений, как правило, часто появляется область, где решения задачи и (или) их производные резко меняются при уменьшении малого параметра (возникают погранслои). Поэтому возникает необходимость выбора оптимального шага интегрирования  $h$  от малого параметра  $\varepsilon$ . Для этой цели выбрали следующие модельные краевые задачи, которые имеют точные аналитические решения.

$$\varepsilon u''(x) - u(x) = \cos^2 \pi x + 2\varepsilon \pi^2 \cos 2\pi x; \quad u(0) = u(1) = 0; \quad (8)$$

$$\varepsilon u^{(IV)}(x) - u''(x) = 1; \quad u(0) = 1; \quad u'(0) = -\gamma; \quad u(1) = 0, 5; \quad u'(1) = \gamma - 1, \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1 - e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}}.$$

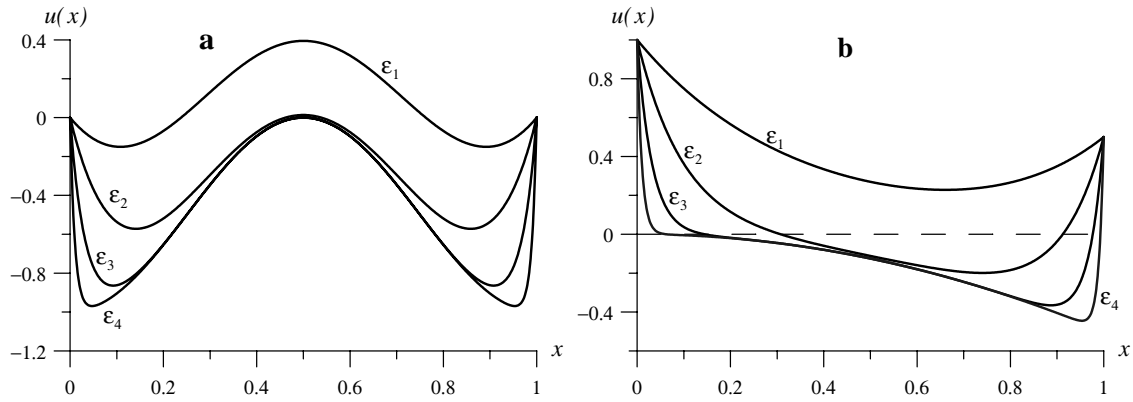


Рис. 1: Решения краевой задачи (8) (а) и краевой задачи (9) (б) для разных значений малого параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_1 = 10^{-1}$ ;  $\varepsilon_2 = 10^{-2}$ ;  $\varepsilon_3 = 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_4 = 10^{-4}$ )

Таблица 1: Максимальные разности точных решений от численных решений краевых задач (8), (9) при разных значениях параметра  $\varepsilon$ .

Краевая задача	$\varepsilon$	$\max y^{\text{cal}} - y^{\text{an}} $	$x_{\text{max}}$
Краевая задача (8),	0,1	$1,294020446351851 \cdot 10^{-12}$	0,50700
	0,01	$1,139518167325715 \cdot 10^{-12}$	0,53200
	0,001	$8,461442657647922 \cdot 10^{-11}$	0,03200
	0,0001	$8,521920058512933 \cdot 10^{-9}$	0,01000
Краевая задача (9),	0,1	$3,089750677531811 \cdot 10^{-13}$	0,64400
	0,01	$1,107437752612128 \cdot 10^{-11}$	0,52200
	0,001	$1,157253542993786 \cdot 10^{-9}$	0,48100
	0,0001	$1,156122617293476 \cdot 10^{-7}$	0,20400

$$u(x) = \frac{e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{(x-1)/\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}} - \cos^2 \pi x;$$

$$u(x) = \frac{e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{(x-1)/\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}} - \frac{x^2}{2}.$$

На рисунке 1 приведены решения краевых задач (8), (9) при разных значениях  $\varepsilon$ . Как видно из рисунков 1, при уменьшении значения параметра  $\varepsilon$  решения обеих модельных краевых задач в окрестности границ  $x = 0$  и  $x = 1$ , начинают резко меняться, т.е. эти задачи имеют решения с пограничными слоями. В таблице I приведены максимальные разности численных решений краевых задач (8) и (9) от их точных аналитических решений. Из численных опытов следует, что функция резко меняется в интервале  $0 \leq x \lesssim \sqrt{\varepsilon}$  (пограничный слой в окрестности  $x = 0$ ), поэтому при выборе шага интегрирования  $h$  необходимо выполнение условия  $h \ll \sqrt{\varepsilon}$ . В дальнейшем при исследовании краевых задач для уравнения 4-го порядка мы учитываем это обстоятельство.

### Обсуждение полученных результатов

На рисунке 2 приведены собственные функции безузлов, с одним, двумя и тремя узлами первой (левые рисунки) и второй (правые рисунки) краевых задач для осцилляторного потенциала при разных значениях параметра  $\varepsilon$ . Аналогичные кривые приведены на рисунке 3 для кулоновского потенциала. Из рисунков видно, что с ростом  $\varepsilon$  решения обеих краевых задач расширяются в сторону увеличения  $r$ . При уменьшении параметра  $\varepsilon$  собственные значения обеих краевых задач стремятся к собственным значениям уравнения Шредингера.

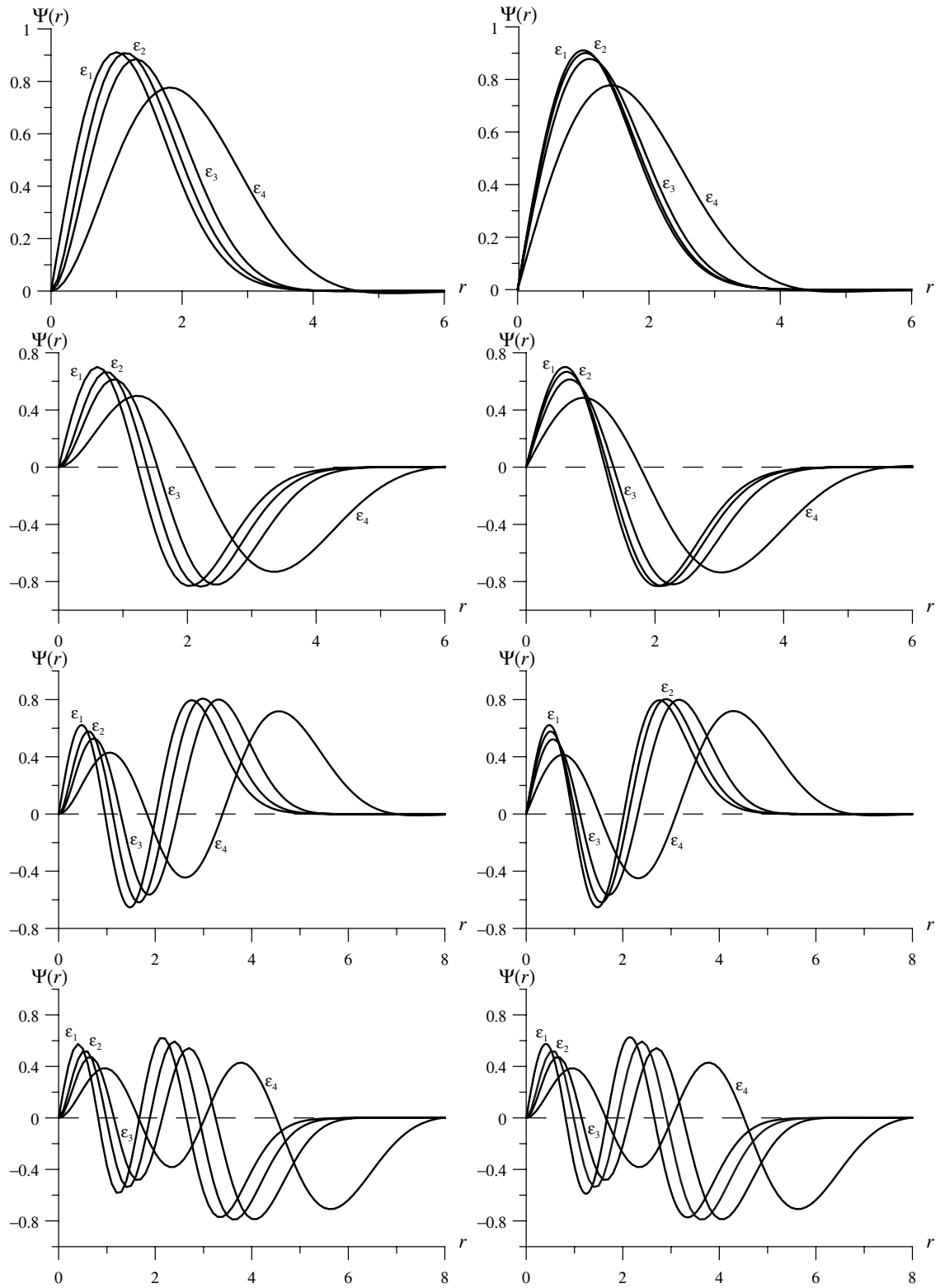


Рис. 2: Решения первой (левые рисунки) и второй (правые рисунки) краевых задач для осцилляторного потенциала при разных значениях параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_2 = 0,5$ ;  $\varepsilon_3 = 1,5$ ;  $\varepsilon_4 = 3,5$ )

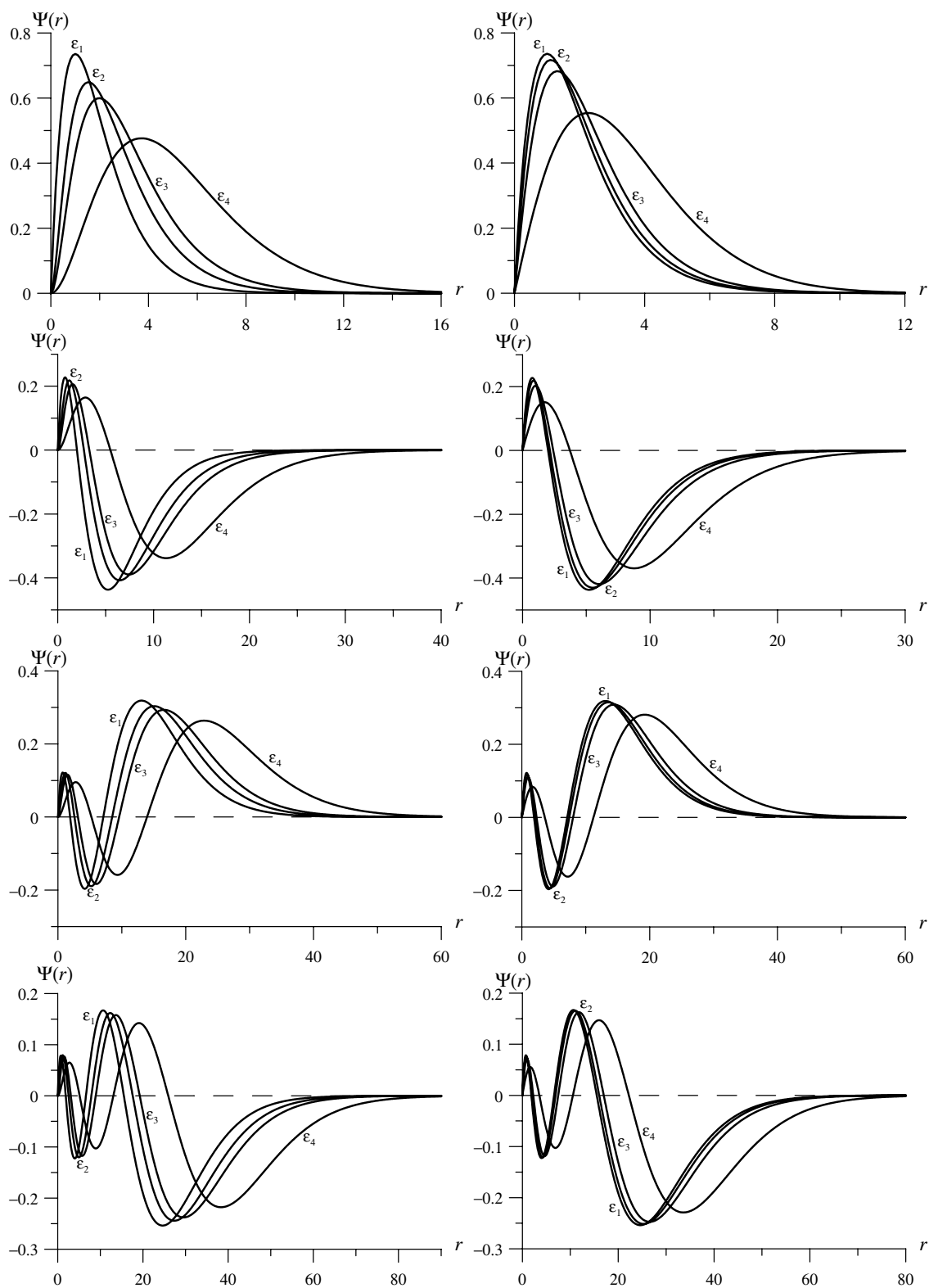


Рис. 3: Решения первой (левые рисунки) и второй (правые рисунки) краевых задач для кулоновского потенциала при разных значениях параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_2 = 0,5$ ;  $\varepsilon_3 = 1,5$ ;  $\varepsilon_4 = 3,5$ )

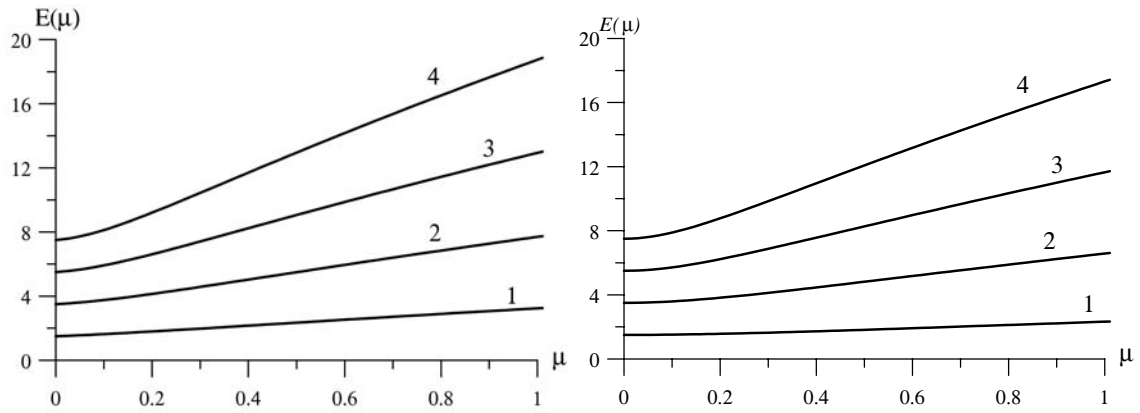


Рис. 4: Зависимость собственных значений первой (левый рисунок) и второй (правый рисунок) краевых задач от параметра  $\mu$  для осцилляторного потенциала

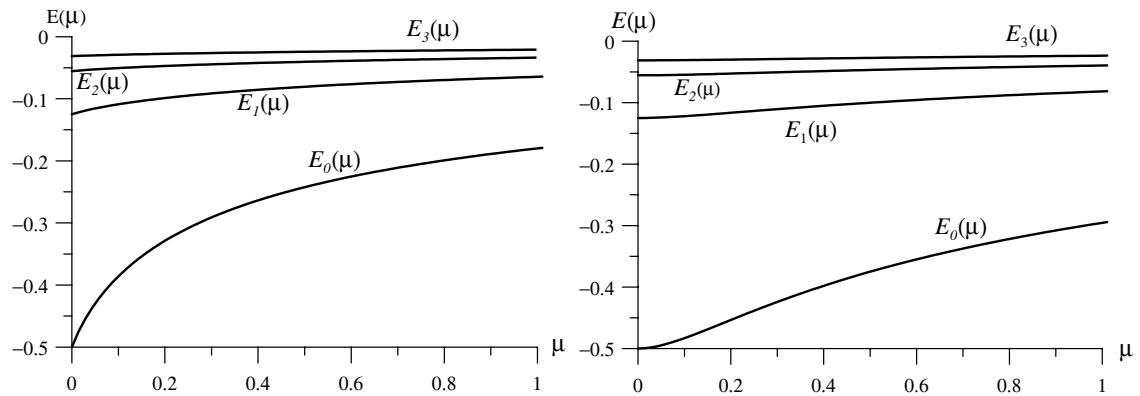


Рис. 5: Зависимость собственных значений первой (левый рисунок) и второй (правый рисунок) краевых задач от параметра  $\mu$  для кулоновского потенциала

На рисунках 4, 5 приведена динамика изменения собственных значений первой и второй краевых задач для осцилляторного и кулоновского потенциалов при изменении  $\mu$  от нуля до единицы. Для обоих потенциалов собственные значения первой краевой задачи сильнее меняются по сравнению с их значениями для второй краевой задачи. Эквидистантность собственных значений уравнения Шредингера для осцилляторного потенциала при переходе в уравнение 4-го порядка для обеих краевых задач не сохраняется.

На рисунке 6 приведено поведение безузловых решений и их производных в окрестности границы  $r = 0$ , первой и второй краевых задач для осцилляторного потенциала при уменьшении параметра  $\varepsilon$ . Из рис. 6 видно, что первая краевая задача имеет пограничный слой на границе  $r = 0$  для производных, а для второй краевой задачи производные не имеют пограничных слоев.

### Заключение

В работе численно найдены решения краевых задач для уравнения 4-го порядка для двух типов потенциала. Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы:

- а. При уменьшении значений параметра  $\varepsilon$  собственные значения первой краевой задачи уравнения 4-го порядка стремятся к собственным значениям уравне-

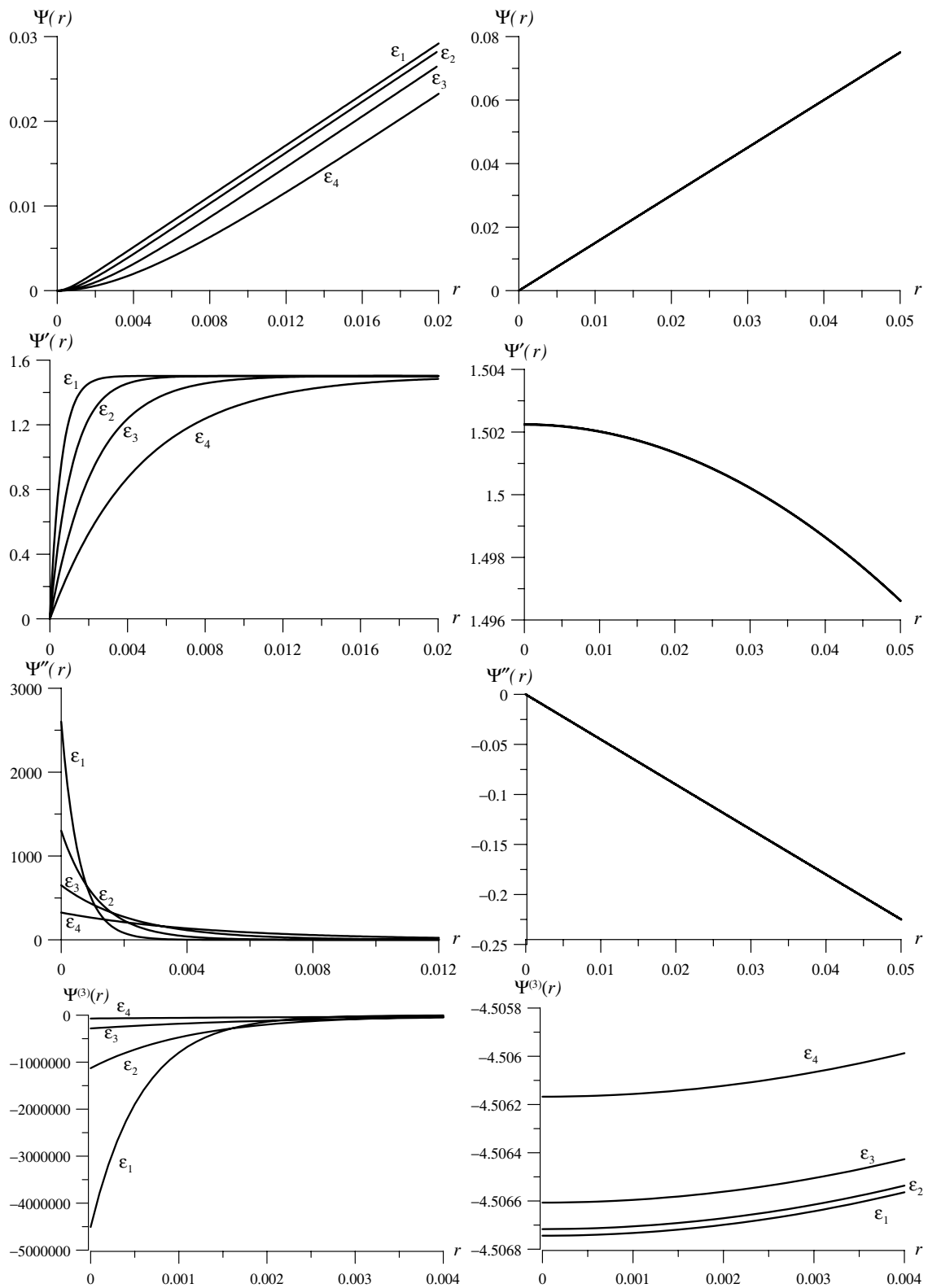


Рис. 6: Поведение безузловых решений первой (левые рисунки) и второй (правые рисунки) краевых задач для осцилляторного потенциала при разных значениях параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_3 = 8 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_4 = 1,6 \cdot 10^{-2}$ )

ния Шредингера, однако производные от собственных функций в окрестности начала координаты  $r = 0$  имеют пограничные слои.

- б. Для второй краевой задачи, собственные функции и собственные значения стремятся к решениям уравнения Шредингера.
- в. При увеличении параметра  $\varepsilon$  от малых до конечных величин собственные функции краевых задач расширяются в сторону увеличения  $r$ .
- г. Свойство эквидистантности собственных значений уравнения Шредингера с осцилляторным потенциалом для уравнения 4-го порядка не сохраняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты N 05-01-00645-а, N 07-01-00738.

## Список литературы

- [1] В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касымов, Н.Б. Скачков, ЭЧАЯ, **2**, №3, 637, (1972).
- [2] I.V. Amirkhanov, S.V. Konnova, E.P. Zhidkov, Computer Physics Communications, **126**, 12-1, (2000).
- [3] И.В. Амирханов, Е.П. Жидков, С.В. Коннова, Сообщение ОИЯИ, P11-2000-54.
- [4] И.В. Амирханов, С.А. Васильев, Е.П. Жидков, И.Е. Жидкова, Дифф. Урав., **т.37**, 1, с.83-90, (2000).
- [5] И.В. Амирханов, С.А. Васильев, Е.П. Жидков, И.Е. Жидкова, Математическое моделирование, **т.15**, 9, с.3-16, (2003).
- [6] И.В. Амирханов, Е.П. Жидков, Н.Р. Саркар, И. Сархатов, Сообщение ОИЯИ, P11-2004-147.
- [7] И.В. Амирханов, Е.П. Жидков, Д.З. Музафаров, Н.Р. Саркар, И. Сархатов, З.А. Шарипов, Сообщение ОИЯИ, P11-2006-107.
- [8] И.В. Амирханов, Е.П. Жидков, Д.З. Музафаров, Н.Р. Саркар, И. Сархатов, З.А. Шарипов, Математическое моделирование, **т.19**, вып.11, (2007).
- [9] Е.П. Жидков, Г.И. Макаренко, И.В. Пузынин, ЭЧАЯ, **т.4**, вып.1, с.127, (1973).
- [10] И.В. Пузынин, И.В. Амирханов, Е.В. Земляная, В.Н. Первушин, Т.П. Пузынина, Т.А. Стриж, В.В. Лахно, ЭЧАЯ, **т.30**, вып.1, с.210-265, (1999).
- [11] Т.Л. Бояджиев, Сообщение ОИЯИ, P2-2002-101.
- [12] Т. Жанлав, И.В. Пузынин, А.В. Ракитский, Сообщение ОИЯИ, P11-1988-823.