

Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации

О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева

Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ

Abstract

To realize precise calculations of complex high technology productions for which an approximation of curves or surfaces of second order is required, it is necessary to use finite elements of the order higher than first. When the boundary value problems with Poisson equation are solved, the convergence of approximate solutions will be more fast if the base functions of elements are harmonic. In this communication it is pointed to existence of the functions for a standard element, the algorithm for their construction is suggested. The results of numerical comparisons of interpolational properties of the harmonic polynomials system with a usual basis of some serendipity elements are also presented. In particular, the comparison shows that for base functions of high orders the approximations, used harmonic basis, converge to exact values more fast.

Математическое моделирование с помощью метода конечных элементов является стандартом информационного сопровождения процесса проектирования практически каждого сложного наукоемкого изделия. Технологии этого метода достаточно хорошо разработаны, в том числе для многомерных задач со сложными областями. Приближенные решения находятся в определенном смысле оптимальным образом как результат минимизации некоторого функционала, например, функционала энергии. При решении эллиптических краевых задач такие приближения обычно имеют вид

$$u(x) = \sum_i \alpha_i N_i(x), \quad x \in w,$$

где w - конечно-элементная ячейка, N_i - базисная функция, а α_i - некоторый коэффициент, который в простейшем случае лагранжева или серендипова элемента [1, 2] является значением $u(x)$ в узле $x_i \in w$. Существуют различные подходы контроля сходимости приближенных решений к точному решению задачи. Такая сходимость является более оптимальной, если функции N_i для каждого i удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению, соответствующему дифференциальному уравнению краевой задачи. В частности, при решении краевой задачи для уравнения Пуассона, чтобы ошибка приближения была в определенном смысле минимальной, функции N_i должны удовлетворять уравнению Лапласа, то есть быть гармоническими. Такими свойствами обладают базисные функции линейных конечных элементов и не обладают базисные функции, соответствующие квадратичным серендиповым или лагранжевым элементам как в двумерном, так и в трехмерном случаях. Для проведения прецизионных расчетов, в которых требуется приближение кривых или поверхностей второго порядка, необходимо использовать конечные элементы порядка выше первого с гармоническими базисными функциями. Отсюда возникает задача построения таких базисных функций.

Рассмотрим вопрос о существовании конечно-элементных гармонических базисных функций порядка выше первого. Как известно (например, [3]), систему гармонических полиномов [4] можно использовать в виде базиса для приближенного

решения краевой задачи с уравнением Лапласа. Однако такой базис не является конечно-элементным (локальным), если иметь в виду известные свойства базисных функций лагранжевых и серендиповых элементов:

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}; \quad N_j(x) = 0, \quad x \in \hat{\gamma}_j, \quad (1)$$

где $\hat{\gamma}_j$ - часть границы w , которой не принадлежит узел x_j . С другой стороны, известны аналитические выражения для решений задач Дирихле в таких специальных областях, как прямоугольник, круг, параллелепипед, цилиндр и шар. Рассмотрим для простоты случай квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Согласно [5], решение задачи имеет вид:

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 u_i N_i^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n^{(k)} \frac{\text{sh}(\pi n(1 + x_{m,k} x_m)/2)}{\text{sh} \pi n} \sin(\pi n(1 + x_{3-m})/2), \quad x \in w, \quad (2)$$

где

$$N_i^{(0)}(x) = (1 + x_{1,i} x_1)(1 + x_{2,i} x_2),$$

$$\tilde{u}_n^{(k)} = \int_{-1}^1 \tilde{u}^{(k)} \sin(\pi n(1 + x_m)/2) dx_m,$$

здесь $m = 1$, когда $k = 1, 3$, и $m = 2$, когда $k = 2, 4$. Через $\tilde{u}^{(k)}$ обозначена функция $u - \sum_{i=1}^4 u_i N_i^{(0)}$, определенная на стороне квадрата с номером k . Нумерация узлов и сторон указана на рис. 1.

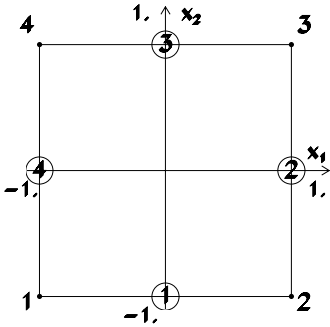


Рис. 1. Нумерация узлов и сторон стандартного элемента

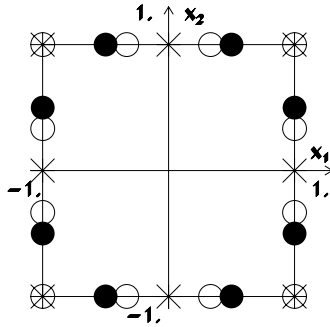


Рис. 2. * - узлы 8-ми узлового элемента, о - узлы 12-ти узлового элемента, *, • - узлы 16-ти узлового элемента

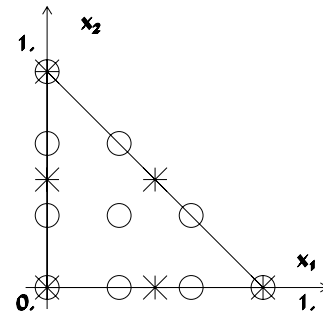


Рис. 3. * - узлы 6-ти узлового элемента, о - узлы 10-ти узлового элемента

Предположим, что функция $\tilde{u}^{(k)}$ с достаточной точностью приближается интерполяционным многочленом Лагранжа степени $p - 1$:

$$\tilde{u}^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^p \tilde{u}^{(k)}(x_j^{(k)}) \prod_{l=1, l \neq j}^p \frac{x_m - x_{m,l}}{x_{m,j} - x_{m,l}} = \sum_{j=2}^{p-1} \tilde{u}^{(k)}(x_j^{(k)}) \prod_{l=1, l \neq j}^p \frac{x_m - x_{m,l}}{x_{m,j} - x_{m,l}},$$

в последней формуле учитывается, что в угловых точках $\tilde{u}^{(k)} = 0$. Отсюда следует

$$\tilde{u}_n^{(k)} = \sum_{j=2}^{p-1} \tilde{u}^{(k)}(x_j^{(k)}) \int_{-1}^1 \prod_{l=1, l \neq j}^p \frac{x_m - x_{m,l}}{x_{m,j} - x_{m,l}} \sin(\pi n(1 + x_m)/2) dx_m = \sum_{j=2}^{p-1} \tilde{u}^{(k)}(x_j^{(k)}) d_{n,j}.$$

Подставляя полученное выражение в (2), будем иметь

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 u_i [N_i^{(0)}(x) - \sum_{k=1}^4 \sum_{j=2}^{p-1} N_i^{(0)}(x_j^{(k)}) N_j^{(k)}(x)] + \sum_{k=1}^4 \sum_{j=2}^{p-1} u^{(k)}(x_j^{(k)}) N_j^{(k)}(x),$$

где

$$N_j^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{n,j} \frac{\text{sh}(\pi n(1 + x_{m,k} x_m)/2)}{\text{sh } \pi n} \sin(\pi n(1 + x_{3-m})/2). \quad (3)$$

Таким образом определяются базисные функции $N_j^{(k)}$ при $j = 2, \dots, p-1$, $k = 1, \dots, 4$, и

$$N_i(x) = N_i^{(0)}(x) - \sum_{k=1}^4 \sum_{j=2}^{p-1} N_i^{(0)}(x_j^{(k)}) N_j^{(k)}(x), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Эти функции удовлетворяют свойствам (1) обычных конечно-элементных функций и являются гармоническими. Скорость сходимости бесконечного ряда в (3) будет зависеть от степени $p-1$ интерполяционного многочлена Лагранжа. Для упрощенного представления определенных базисных функций через обычные полиномиального вида конечно-элементные базисные функции M_i можно один раз с высокой точностью решить вспомогательные краевые задачи

$$\Delta(\sum_i \beta_i^{(j,k)} M_i(x)) = 0, \quad x \in w,$$

$$\sum_i \beta_i^{(j,k)} M_i(x) = N_j^{(k)}, \quad x \in \partial w,$$

при $k = 1, \dots, 4$ и $j = 2, \dots, p-1$, а далее использовать найденные коэффициенты $\beta_i^{(j,k)}$ для формирования системы уравнений основной задачи.

Отметим, что аналогичные результаты справедливы и для других указанных выше специальных областей. Кроме того, они справедливы для всех аффинно-эквивалентных и изопараметрически-эквивалентных [1] конечных элементов и обобщаются на трехмерный случай.

Приведем некоторые примеры численного сравнения интерполяционных свойств системы гармонических многочленов

$$1; x_1; x_2; x_1 \cdot x_2; x_1^2 - x_2^2; x_1 \cdot (x_1^2 - 3x_2^2); x_2 \cdot (x_2^2 - 3x_1^2); x_1^2 \cdot (x_1^2 - 3x_2^2) + x_2^2 \cdot (x_2^2 - 3x_1^2); \dots \quad (4)$$

с обычными конечно-элементными базами некоторых серендиповых элементов. В качестве интерполируемых выбирались функции

$$u_i^*(x) = B_1^{(i)}(x) + B_2^{(i)}(x), \quad i = 1, 2; \quad \vec{B}^{(i)}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_i} \vec{J}^{(i)} \times \nabla \frac{1}{|x-y|} d\Omega_y.$$

Здесь $|x-y|$ -расстояние между точками x и y . При вычислениях предполагалось, что области Ω_i , $i = 1, 2$, имеют бесконечную протяженность вдоль оси $0x_3$, а в плоскости $x_3 = 0$ имеют сечения соответственно D_1 и D_3 в виде

$$D_1 = P_1 \cup P_2, \quad D_3 = D_1 \cup D_2, \quad D_2 = P_3 \cup P_4,$$

$$P_k = \{2. \leq (-1)^k x_1 \leq 3., |x_2| \leq 2.\}, \quad k = 1, 2,$$

$$P_l = \{2. \leq (-1)^l x_2 \leq 3., |x_1| \leq 2.\}, \quad l = 3, 4.$$

Вектор $\vec{J}^{(i)} = f_i(x)\vec{i}_3$, где

$$f_1(x) = (-1)^k 10000. \quad x \in P_k, \quad k = 1, 2; \quad f_2(x) = (-1)^l 10000., \quad x \in D_l, \quad l = 1, 2.$$

Заметим, что $\vec{B}^{(i)}$, $i = 1, 2$, задают поля с симметрией магнитных полей основных магнитов ускорителей. В таблице 1 представлены величины

$$\sigma_k = \max_{x \in w} \left| \frac{u_k^* - u_k}{u_k^*} \right|, \quad k = 1, 2,$$

на сетке с шагом 0.1 по каждой переменной. Узлы соответствующих элементов представлены на рис.2,3. Как видно из приведенных примеров, приближения, полученные с помощью гармонических многочленов, с ростом числа узлов, практически во всех случаях, сходятся к точному решению быстрее, чем приближения, полученные с помощью обычных конечно-элементных базисов.

Таким образом, из полученных в сообщении результатов следует, что конечно-элементные гармонические базисные функции порядка выше первого существуют и могут быть эффективно использованы как для решения краевых задач с уравнением Пуассона в областях с гладкими кривыми и поверхностями, так и для задач многомерных конечно-элементных интерполяций гармонических функций. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 07-01-00738.

Таблица 1

Нормы	Элементы с базисом (4)		Серендиповы элементы	
	8 узлов	12 узлов	8 узлов	16 узлов
σ_1	0,3396E-02	0,5779E-03	0,7744E-02	0,6049E-03
σ_2	0,2199E-02	0,1995E-04	0,1770E-02	0,1228E-02
Нормы	Элементы с базисом (4)		Серендиповы элементы	
	6 узлов	10 узлов	6 узлов	10 узлов
σ_1	0,5977E-03	0,6012E-05	0,4423E-03	0,9323E-04
σ_2	0,7298E-03	0,2697E-03	0,7958E-03	0,2647E-02

Список литературы

- [1] Ф.Сьярле. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., Мир, 1980.
- [2] О.Зенкевич, К.Морган. Конечные элементы и аппроксимация. М., Мир, 1986.
- [3] К.Ректорис. Вариационные методы в математической физике и технике. М., Мир, 1985.
- [4] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.
- [5] Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов. Сборник задач по математической физике. М., Наука, 1980.