Конечно-элементные векторные узловые базисные функции из специальных гильбертовых пространств

О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева

e-mail: yuldash@cv.jinr.ru, juldash@cv.jinr.ru,

Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ, Дубна

1. Введение

При решении сложных эллиптических задач методом конечных элементов очень важным является выбор базиса [1, 2]. Конечно-элементный базис [3] влияет не только на скорость сходимости приближённых решений к точному, но и на скорость сходимости итерационных процессов решения дискретизованной задачи [4]-[6].

Авторами разработаны алгоритмы построения конечно-элементных векторных узловых базисных функций из гильбертовых пространств, описанных в [7]

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W_2^1}(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0\};$$

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L_2}(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L_2}(\Omega)\};$$

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L_2}(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} \in L_2(\Omega), \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0\}.$$

Функции из пространства $\mathbf{Z}$ могут быть представлены в виде градиентов гармонических функций [8]. Поэтому в первую очередь приведём алгоритмы генерации гармонических конечно-элементных базисных функций.

2. Гармонические конечно-элементные базисные функции

В работах [9, 10] предложены два алгоритма построения этих функций для аппроксимаций высокого порядка. Приближенное решение u^h в каждом конечном элементе ω в форме тетраэдра, гексаэдра, пятигранной призмы и т.п. ищется в виде

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i^h N_i(x), \tag{1}$$

где u_i^h, $i = 1, ..., m$, - значения приближенного решения в узлах $\{x_i\}_{i=1,...,m}$ на границе $\partial\omega$, а $N_i(x)$, $i = 1, ..., m$, - базисные функции.

Для определения $N_i(x)$ при условии, что $\Delta N_i = 0$, согласно первому алгоритму, используется метод коллокации. Базисная функция определяется в виде $N_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j^{(i)} f_g(j)(x)$, где $a_j^{(i)}$ - неизвестные коэффициенты, $g(j)$ -индексная функция, $j = 1, ..., m$, а в качестве $f_g(j)$ выбираются функции

$$p_{n+1,k+1}(x) = \sigma_{nk}(r/r_0)^n \cos(k\varphi) P_n^k(cos\theta),$$

$$q_{n+1,k+1}(x) = \sigma_{nk}(r/r_0)^n \sin(k\varphi) P_n^k(cos\theta) \tag{2}$$

при $x = (r, \theta, \varphi)$, $\sigma_{nk} = (2n + 1)(n - k)!/(n + k)!$, которые вычисляются по реккурентным формулам [10] и входят в общее представление решения задачи Дирихле для оператора Лапласа внутри сферы радиуса r_0 [11]. Неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^{(i)} f_g(j)(x_l) = \delta(x_i, x_l), \quad l = 1, ..., m.$$

Индексная функция $g(j)$ подбирается так, чтобы система была разрешима [10]. Точность аппроксимаций с помощью $N_i(x)$ определяется степенями гармонических многочленов, которые входят в функции $f_g(j)$, $j = 1, ..., m$, и для которых аппроксимационная формула (1) точна.

По второму алгоритму $N_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j^{(i)} f_j(x)$, где f_j выбираются последовательно из функций (2), а неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^{(i)} \int\limits_{\partial\omega} f_j f_l dS = \int\limits_{\partial\omega} L_i f_l dS, \quad l = 1, 2, ..., m,$$

где L_i - лагранжевая граничная базисная функция [12]. Точность приближений функциями $N_i(x)$ зависит от точности аппроксимаций функциями L_i, $i = 1, ...m$.

В связи с возможностью представления гармонических функций в виде разложения в ряд по функциям, являющимся фундаментальными решениями уравнения Лапласа, рассмотрим третий алгоритм. Базисную функцию представим в виде потенциала простого слоя

$$N_i(x) = \int\limits_{\partial\omega} (c^{(i)}(y)/|x - y|) dS_y,$$

где $c^{(i)}$ - функция плотности, $|x-y|$ - расстояние между точками x и y. Неизвестную функцию плотности можно находить из уравнения

$$\int_{\partial\omega}(c^{(i)}(y)/|x_j-y|)dS_y=\delta(x_i,x_j),\quad j=1,2,...,m. \tag{3}$$

Если интегрирование проводить по поверхности $\partial\tilde{\omega}$, отстоящей от $\partial\omega$ на некотором небольшом расстоянии по направлению внешней нормали, то придём к методу из [13], который предлагался для решения краевых задач с уравнением Лапласа. В этом случае при использовании кусочно-постоянной дискретизации находим радиальные базисные функции [14, 15]. Более высокую скорость сходимости приближений для N_i можно получить, если уравнение (3) решать методом коллокации с использованием представления

$$c^{(i)}(y)=\sum_{j=1}^{m}c_j^{(i)}L_j(y),$$

где $c_j^{(i)}$,$j=1,2,..,m$, - неизвестные коэффициенты. Точность аппроксимаций с помощью таких базисных функций зависит от точности приближений лагранжевым граничным базисом. Однако ввиду сингулярности подинтегрального выражения в (3), этот алгоритм увеличивает вычислительную работу.

Важным свойством конечных элементов с гармоническими базисными функциями является отсутствие внутренних узлов даже при использовании аппроксимаций высокого порядка.

3. Конечно-элементные векторные узловые базисные функции из пространства Z

В работе [8] представлены два алгоритма построения конечно-элементных векторных узловых базисных функции для аппроксимаций высокого порядка из пространства $\mathbf{Z}$. В обоих случаях используется тот факт, что как и сами гармонические функции, их градиенты обладают хорошими аппроксимационными свойствами [16].

Пусть приближенное решение $\mathbf{u}$ ищется в виде разложения по базисным функциям $\mathbf{W}_j^{(k)}$

$$\mathbf{u}(x)=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{i}_k(\sum_{j=1}^{m}u_{k,j}N_j(x))=\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{m}u_{k,j}\mathbf{W}_j^{(k)}(x), \tag{4}$$

где $u_{k,j}$ - значения приближенного решения в узлах $\{x_j\}_{j=1,...,m}$ на границе $\partial\omega$.

Согласно первому алгоритму, базисные функции определяются в виде

$$\mathbf{W}_i^{(k)}(x)=\sum_{j=1}^{3m}a_j^{(k,i)}\nabla f_{g(j)}(x),$$

где $a_j^{(k,i)}$ - неизвестные коэффициенты, $f_{g(j)}$ - гармонические функции из (2), $g(j)$ - индексная функция. Неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы

$$\sum_{j=1}^{3m}a_j^{(k,i)}\frac{\partial f_{g(j)}}{\partial x_k}(x_l)=\delta_{il},\quad \sum_{j=1}^{3m}a_j^{(k,i)}\frac{\partial f_{g(j)}}{\partial x_{k1}}(x_l)=0,$$

$$\sum_{j=1}^{3m}a_j^{(k,i)}\frac{\partial f_{g(j)}}{\partial x_{k2}}(x_l)=0,\quad x_l\in\partial\omega;\quad l=1,2,...,m,$$

$$k\neq k1,\quad k\neq k2,\quad k1\neq k2,\quad 1\leq k,k1,k2\leq 3.$$

Индексная функция g подбирается так, чтобы система была разрешима. Точность аппроксимаций такими базисными функциями зависит от степени гармонических многочленов, градиенты которых участвуют в определении коэффициентов $a_j^{(k,i)}$.

Во втором алгоритме базисные функции определяются в виде

$$\mathbf{W}_i^{(k)}(x)=\sum_{j=1}^{3m}b_j^{(k,i)}\nabla f_{g(j)}(x),$$

где по правилу построения среднеквадратичного приближения коэффициенты $b_j^{(k,i)}$ находятся из системы

$$\sum_{j=1}^{3m}b_j^{(k,i)}\int_{\partial\omega}\nabla f_{g(j)}\cdot\nabla f_{g(l)}dS=\int_{\partial\omega}L_i\frac{\partial f_{g(l)}}{\partial x_k}dS,$$

$l=1,2,...,3m$. Здесь $g(j)=j+1$, $j=1,2,...,3m$, если $f_1=1$. Точность аппроксимаций в этом случае зависит от точности приближений лагранжевыми граничными базисными функциями L_i $(1\leq i\leq m)$.

Так же, как и в предыдущем случае, в конечных элементах с векторными гармоническими базисными функциями отсутствуют внутренние узлы даже в случае аппроксимаций высокого порядка.

4. Конечно-элементные векторные узловые базисные функции из пространства V

Алгоримы из предыдущего пункта можно использовать для построения конечно-элементных векторных узловых базисных функций для решения нелинейных задач [17].

Пусть приближенное решение $\mathbf{u}$ ищется в виде (4), где $u_{k,j}$ - значения приближенного решения в узлах $\{x_j\}_{j=1,...,m}$ внутри и на границе ω.

Согласно первому алгоритму, базисные функции определяются в виде

$$\mathbf{W}_i^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \nabla h_{g(j)}(x),$$

где $a_j^{(k,i)}$ - неизвестные коэффициенты, $g(j)$ - индексная функция, $h_{g(j)}$, $j = 1, ..., m$, - функции из множества

$$\{1; x_1; x_2; x_3; x_1x_2; x_1x_3; x_2x_3; x_1x_2x_3; x_1^2, x_2^2, x_3^2, ...\}. \quad (5)$$

Неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы

$$\sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \frac{\partial h_{g(j)}}{\partial x_k}(x_l) = \delta_{il}, \quad \sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \frac{\partial h_{g(j)}}{\partial x_{k1}}(x_l) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \frac{\partial h_{g(j)}}{\partial x_{k2}}(x_l) = 0, \quad x_l \in \partial\omega; \quad l = 1, 2, ..., m,$$

$$k \neq k1, \quad k \neq k2, \quad k1 \neq k2, \quad 1 \leq k, k1, k2 \leq 3.$$

Индексная функция g подбирается так, чтобы система была разрешима.

Во втором алгоритме базисные функции определяются в виде

$$\mathbf{W}_i^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \nabla h_{g(j)}(x),$$

где по правилу построения среднеквадратичного приближения коэффициенты $b_j^{(k,i)}$ находятся из системы

$$\sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \int_\omega \nabla h_{g(j)} \cdot \nabla h_{g(l)} dS = \int_\omega \tilde{L}_i \frac{\partial h_{g(l)}}{\partial x_k} dS,$$

$l = 1, 2, ..., 3m$. Здесь $g(j) = j + 1$, $j = 1, 2, ..., 3m$, если $h_1 = 1$, а $\tilde{L}_i$ - i-я лагранжевая базисная функция, определенная на узлах $\{x_i\}_{i=1,...m}$. В обоих алгоритмах точность аппроксимаций базисными функциями $\mathbf{W}_i^{(k)}(x)$ зависит от степени многочленов (5), градиенты которых участвуют в определении коэффициентов $a_j^{(k,i)}$ и $b_j^{(k,i)}$.

5. Конечно-элементные векторные узловые базисные функции из пространства U

Для решения нелинейных задач из [17] необходимы конечно-элементные базисные функции из пространства $\mathbf{U}$. Можно заметить, что если известны базисные функции $\mathbf{W}_i^{(k)} \in \mathbf{V}$, $i = 1, ...m, k = 1, 2, 3$, то из них можно получить базисные функции из пространства $\mathbf{V}$. Пусть $\mathbf{Z} = \mathbf{W}_i^{(k)} \times \mathbf{i}_l$, $k \neq l$, тогда

$$\nabla \cdot \mathbf{Z} = \nabla \cdot (\mathbf{W}_i^{(k)} \times \mathbf{i}_l) = \mathbf{i}_l \nabla \times \mathbf{W}_i^{(k)} = 0.$$

Поэтому этот случай сводится к предыдущему.

6. Заключение

В работе представлены алгоритмы построения векторных узловых базисных функции из специальных гильбертовых пространств $\mathbf{Z}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$. Такие базисные функции необходимы для решения линейных и нелинейных задач [17] с помощью конечно-элементных схем с высоким порядком сходимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00738).

Список литературы

[1] Г.И. Марчук, В.И. Агошков: *Введение в проекционно-сеточные методы.* М.: Наука, 1981.

[2] P. Šolin: *Partial differential equations and the finite element method.* Wiley interscience, 2006.

[3] Ф. Сьярле: *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* М.: Мир, 1980.

[4] В.В. Шайдуров: *Многосеточные методы конечных элементов.* М.: Наука, 1989.

[5] Y. Saad: *Iterative methods for sparse linear systems.* Boston: PWS Publishing Company, 1996.

[6] C.C. Douglas, G. Haase, U. Langer: *A Tutorial on elliptic PDE solvers and their parallelization.* Philadelphia: SIAM, 2003.

[7] P. Monk: *Finite element methods for Maxwell's equations.* Oxford: Clarendon press, 2003.

[8] O.I. Yuldashev, M.B. Yuldasheva: *About a Class of Finite Elements with Harmonic Basis Functions.* Mathematical modeling and computational physics. Book of abstracts of international conference, Dubna, July 7-11, 2009. Dubna: JINR, 2009.

[9] О.И. Юлдашев,М.Б. Юлдашева: *Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации* // JINR LIT Scientific report 2006-2007. Dubna: JINR, 2007. 317-320.

[10] O.I. Yuldashev, M.B. Yuldasheva: *3D finite elements with harmonic basis functions for approximations of high order.* Препринт ОИЯИ. E11-2008-104. Dubna, 2008. http://www1.jinr.ru/Preprints/2008/104(E11-2008-104).pdf

[11] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский: *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1977.

[12] К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел: *Методы граничных элементов.* М.: Мир, 1987.

[13] М.А. Алексидзе: *Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям.* М.: Наука, 1978.

[14] G. Fairweather, A. Karageorghis: *The method of fundamental solution for elliptic boundary value problems.* // Adv. Comput. Math., v.9, 1998, p.69-95.

[15] S. Martin, et all : *Polihedral finite elements using harmonic basis functions.* Proceedings ESGP, Computer Graphics Forum, v.27 (5), 2008, p.1521-1529.

[16] V.P. Havin, A.P. Sagué: *Approximation properties of harmonic vector fields and differential forms* // Methods of Approximation theory in complex analysis and mathematical physics. v.1550. Berlin-Heidelberg: Springer, 1993. 149-156.

[17] О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева: *Новое правило построения квадратичных функционалов для решения методом конечных элементов относительно векторов-функций краевых задач с системой из двух уравнений первого порядка в дивергентной и вихревой формах.* // JINR LIT Scientific Report 2008-2009, JINR, Dubna, 2009.