

Улучшенная математическая модель расчёта токов в концентрических катушках коррекции основного магнитного поля многоцелевого изохронного циклотрона

И.В. Амирханов¹, Г.А. Карамышева¹, И.Н. Киян¹, Я. Суликовский²

¹Объединённый Институт Ядерных Исследований (ОИЯИ), Дубна; ²Институт Ядерной Физики Польской Академии Наук (ИЯФ ПАН), Краков

Введение

Принцип работы многоцелевого изохронного циклотрона заключается в том, что по мере возрастания энергии ускоряемых частиц увеличивается значение эквивалентного радиуса замкнутой равновесной орбиты (радиуса замкнутой равновесной орбиты, представленной в виде круга), а частота обращения частиц остаётся неизменной [1]. Требуемое магнитное поле $B_{task}(r, \theta)$ формируется в диапазоне рабочих радиусов ускорения от системы инжекции до системы вывода пучка ионов с определённой точностью как с помощью главной катушки, формирующей основное магнитное поле $B_{main}(r, \theta)$, так и с помощью вложенных друг в друга концентрических катушек коррекции основного магнитного поля, формирующих вклады $B_j(r, \theta)$, $j = 1, 2, \dots, z$, где z - это число имеющихся концентрических катушек. В итоге, создаётся результирующее магнитное поле $B_{res}(r, \theta)$ в котором и производится ускорение внутреннего пучка ионов. Основные параметры операционного режима работы многоцелевого изохронного циклотрона включают в себя набор значений токов в главной и в концентрических катушках, частоту ВЧ-генератора и напряжение на дуантах. К дополнительным параметрам относятся токи в гармонических катушках коррекции первой и основной гармоник результирующего магнитного поля. Искусственно создаваемая первая гармоника не влияет на значение среднего магнитного поля и используется для раскачки пучка ионов на конечных радиусах ускорения с целью улучшения разделения орбит и вывода пучка через электростатический дефлектор [1].

Исходные данные включают в себя тип ускоряемых частиц, кинетическую энергию частиц на определённом радиусе ускорения или частоту ВЧ-генератора, радиус рабочей точки (места пересечения среднего основного и среднего требуемого магнитных полей в области конечных радиусов ускорения), кратность ускорения частиц (отношение частоты ВЧ-генератора к частоте обращения частицы), периодичность магнитной структуры (число магнитных секторов),

диапазон формирования требуемого магнитного поля, а также маску изохронного магнитного поля, которая определяет форму центрального бампа и краевого магнитного поля. Кроме того, к исходным данным относится набор измеренных или рассчитанных карт магнитных полей: основных магнитных полей $B_{main}(r, \theta)$ от тока в главной катушке и дополнительных магнитных полей $B_{add}(r, \theta)$ от максимального тока (как вариант от максимального и минимального токов) в каждой из отдельно взятых концентрических катушек для каждого определённого уровня тока в главной катушке. Измерения карт магнитных полей производятся с определёнными шагами по радиусу ΔR_{ms} и азимуту $\Delta \theta_{ms}$. Разность между соответствующими дополнительным и основным магнитными полями составляет максимальный вклад рассматриваемой концентрической катушки $B_{j,max}(r, \theta)$, $j = 1, 2, \dots, z$ в основное магнитное поле $B_{main}(r, \theta)$. Средние магнитные поля (с усреднением по азимуту) рассчитываются по следующей общей формуле:

$$\bar{B}_{index}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} B_{index}(r, \theta) d\theta \quad (1)$$

Расчёт токов в концентрических катушках

Для получения требуемого режима работы многоцелевого изохронного циклотрона необходимо определить значения токов во всех концентрических катушках коррекции основного магнитного поля I_j , $j = 1, 2, \dots, z$ для определённого уровня тока в главной катушке $I_{main,work}$. Токи в концентрических катушках рассчитываются на основе метода наименьших квадратов с покомпонентным вводом решения в границы области допустимых значений [2]. При этом, токи в концентрических катушках рассматриваются последовательно в направлении, определяемом зонами влияния концентрических катушек на основное магнитное поле: от первой концентрической катушки, расположенной в центре циклотрона, к последней, наиболее удалённой от его

центра. Нижнее и верхнее граничные значения тока в каждой концентрической катушке укладываются в рамки соответствующих минимального и максимального значений. Нижнее и верхнее граничные значения тока в j -ой концентрической катушке (два значения переменной $I_{j,lim}$) определяются следующим образом:

$$I_{j,lim} = \left\{ \begin{array}{l} I_{j,low}, (-I_{j,max} \leq I_{j,low} < I_j \leq 0) \\ I_{j,high}, (0 \leq I_j < I_{j,high} \leq I_{j,max}) \end{array} \right\},$$

$$I_{j,max} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, z \quad (2)$$

где $I_{j,max}$ – это максимальный ток в j -ой концентрической катушке; $z = m + k$ – это число фиксированных (m) и свободных (k) компонент вектора решения. Для удобства дальнейших расчётов вводятся следующие безразмерные обозначения:

$$k_{i,lim} = \frac{I_{i,max}}{I_{i,lim}}, \quad I_i^* = \frac{I_i}{I_{i,max}}$$

$$\overline{B}_{i,max}^*(r^*) = \frac{\overline{B}_{i,max}(r^*)}{B_0}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

$$\lambda^* = \left(\frac{\lambda}{B_0} \right)^2, \quad \Delta \overline{B}^*(r^*) = \frac{\Delta \overline{B}(r^*)}{B_0}, \quad r^* = \frac{r}{r_0}$$

$$\Delta \overline{B}(r^*) = \overline{B}_{task}(r^*) - \overline{B}_{start}(r^*) \quad (4)$$

$$\overline{B}_{task}(r^*) = \overline{B}_{is}(r^*) + \overline{B}_{mask}(r^*) \quad (5)$$

$$\overline{B}_{mask}(r^*) = \overline{B}_{bump}(r^*) + \overline{B}_{edge}(r^*) \quad (6)$$

$$\overline{B}_{start}(r^*) = \overline{B}_{main}(r^*) + \sum_{j=1}^m \overline{B}_{j,const}(r^*) \quad (7)$$

$$\overline{B}_{j,const}(r^*) = \overline{B}_{j,max}(r^*) \cdot \frac{I_{j,const}}{I_{j,max}},$$

$$j = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

где r_0 , B_0 – это определённые коэффициенты, имеющие соответственно размерности длины и магнитного поля, позволяющие перейти к безразмерным величинам ($r_0 = 1\text{м}$, B_0 рассчитывается таким образом, что детерминант матрицы коэффициентов неоднородной СЛАУ (12) $D = 1$); r – средний радиус замкнутой равновесной орбиты; $\overline{B}_{i(j),max}(r^*)$ – среднее магнитное поле максимального вклада i -ой (j -ой) концентрической катушки в основное магнитное поле; λ – переменный параметр штрафной функции; I_i , $I_{i,max}$, $I_{i,lim}$ – расчётный, максимальный и предельный токи в i -ой концентрической катушке; $I_{j,const}$, $I_{j,max}$ – фиксированный и максимальный токи в j -ой концентрической катушке; $\overline{B}_{task}(r^*)$ – среднее требуемое магнитное поле; $\overline{B}_{is}(r^*)$ – изохронное магнитное поле; $\overline{B}_{mask}(r^*)$ – маска изохронного магнитного поля; $\overline{B}_{bump}(r^*)$ – среднее магнитное поле центрального бампа; $\overline{B}_{edge}(r^*)$

– среднее краевое магнитное поле; $\overline{B}_{start}(r^*)$ – среднее исходное магнитное поле; $\overline{B}_{main}(r^*)$ – среднее основное магнитное поле; $\overline{B}_{j,const}(r^*)$ – среднее магнитное поле вклада j -ой концентрической катушки, ток в которой фиксируется пользователем на любом допустимом уровне или программой на границе области допустимых значений.

Представленный ниже функционал формализует методику расчёта токов в концентрических катушках коррекции основного магнитного поля циклотрона:

$$F(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*) =$$

$$= \int_0^{R_{septum}^*} \left[\sum_{j=1}^k \left(\overline{B}_{j,max}^*(r^*) \cdot I_j^* \right) - \Delta \overline{B}^*(r^*) \right]^2 dr^* +$$

$$+ \lambda^* \cdot \sum_{j=1}^k (k_{j,lim} \cdot I_j^*)^{2p} \quad (9)$$

где R_{septum}^* – нормированный радиус расположения септума (первого ножа) электростатического дефлектора; p – это постоянный параметр штрафной функции. На основе ряда численных экспериментов при условии установки граничных значений на уровне $\pm 97\%$ от соответствующих максимальных значений для каждой компоненты вектора решения, значение константы p выбирается равным 25. Штрафная функция, входящая в состав функционала в виде второго слагаемого, позволяет вводить решение в границы области допустимых значений покомпонентно в направлении, определённом выше. При минимизации функционала берутся частные производные по каждой из свободных компонент искомого вектора решения, которые затем приравниваются к нулю.

$$\frac{\partial F(I_1^*, I_2^*, \dots, I_k^*)}{\partial I_i^*} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (10)$$

После взятия частных производных выражение (10) переписывается в виде следующей неоднородной системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^k \{ S_{i,j} \cdot I_j^* \} + \lambda^* \cdot p \cdot (k_{i,lim})^{2p} \cdot (I_i^*)^{2p-1} =$$

$$= \int_0^{R_{septum}^*} \left[\overline{B}_{i,max}^*(r^*) \cdot \Delta \overline{B}^*(r^*) \right] dr^*$$

$$S_{i,j} = \int_0^{R_{septum}^*} \left[\overline{B}_{i,\max}^*(r^*) \cdot \overline{B}_{j,\max}^*(r^*) \right] dr^* \quad (11)$$

$i = 1, 2, \dots, k$

Полученная неоднородная система нелинейных алгебраических уравнений (11) решается итерационным путём. На первом шаге итерационного цикла нахождения решения (11) величина переменной λ^* устанавливается равной 0. Получившаяся неоднородная система линейных алгебраических уравнений решается с помощью метода Гауса с выбором главного элемента по матрице. Если полученный вектор решения $I_j^{*(0)}$ по некоторым своим компонентам выходит за границы области допустимых значений, величина переменной λ^* рассчитывается для каждой такой компоненты с целью ввода её в рамки заданных граничных значений. При этом, в первую очередь берётся та из рассматриваемых компонент, которая определяет ток в концентрической катушке, расположенной наиболее близко к центру циклотрона. Решение $I_j^{*(0)}$ подставляется в левую часть (11) и сохраняется неизменным в течение всего времени расчёта λ^* . При этом, следующая неоднородная система линейных алгебраических уравнений решается с помощью метода Гауса с выбором главного элемента по матрице:

$$\sum_{j=1}^k \{a_{i,j} \cdot I_j^*\} = b_i \quad (12)$$

$$a_{i,j} = \int_0^{R_{septum}^*} \left[\overline{B}_{i,\max}^*(r^*) \cdot \overline{B}_{j,\max}^*(r^*) \right] dr^* + \lambda^* \cdot p \cdot (k_{j,lim})^{2p} \cdot (I_j^{*(0)})^{2p-2} \cdot \delta_{ij} \quad (13)$$

$$b_i = \int_0^{R_{septum}^*} \left[\overline{B}_{i,\max}^*(r^*) \cdot \Delta \overline{B}^*(r^*) \right] dr^* \quad (14)$$

$i = 1, 2, \dots, k$

где $\delta_{i,j}$ – это символ Кронекера. После ввода с определённой точностью рассматриваемой компоненты вектора решения в рамки заданных граничных значений, данная компонента переводится из разряда свободных в разряд фиксированных. Затем, на следующем шаге итерационного цикла нахождения решения (11) величина переменной λ^* опять устанавливается равной 0 и весь цикл расчётов повторяется. При этом, производится уплотнение матрицы коэффициентов и вектора свободных членов. После покомпонентного ввода всего решения в границы области допустимых значений, при $\lambda^* = 0$ находится искомое решение (11) и формируется набор токов в

концентрических катушках коррекции основного магнитного поля I_j , $j = 1, 2, \dots, z$ для определённого уровня тока в главной катушке $I_{main,work}$. Исходя из полученных значений токов в концентрических катушках, рассчитываются карты магнитных полей вкладов концентрических катушек в основное магнитное поле. В итоге, формируется карта результирующего магнитного поля $B_{res}(r, \theta)$ как сумма карты основного магнитного поля $B_{main,work}(r, \theta)$ и карт вкладов концентрических катушек $B_j(r, \theta)$, $j = 1, 2, \dots, z$. Исходя из полученной карты результирующего магнитного поля $B_{res}(r, \theta)$, из-за влияния вкладов концентрических катушек на азимутальную вариацию основного магнитного поля на основе алгоритма М.М. Гордона [3] производится перерасчёт изохронного магнитного поля $\overline{B}_{is}(r^*)$. Далее, производится перерасчёт среднего требуемого магнитного поля $\overline{B}_{task}(r^*)$ (5). Затем, производится перерасчёт $\Delta \overline{B}(r^*)$ (4) и весь процесс формирования набора токов в концентрических катушках коррекции основного магнитного поля I_j , $j = 1, 2, \dots, z$ для определённого уровня тока в главной катушке $I_{main,work}$ повторяется. Интегрирование выражений (1), (13) и (14) производится с помощью квадратурных формул Симпсона [4]. Анализ устойчивости решений, получаемых на основе представленной математической модели, подробно излагается в [5].

Заключение

На основе рассмотренной математической модели расчёта токов в концентрических катушках коррекции основного магнитного поля многоцелевого изохронного циклотрона на C++ была разработана программа Cyclotron Mode 2009, которая вошла в комплекс программ Cyclotron Operator HELP 2009, который был установлен на сервере многоцелевого изохронного циклотрона АИЦ-144 в Институте Ядерной Физики Польской Академии Наук (Краков, Польша) [6], [7]. С помощью Cyclotron Operator HELP 2009 был смоделирован основной режим работы АИЦ-144 (протоны, частота ВЧ-генератора $F_{rf} = 26.155$ МГц, напряжение на дуантах $U_d = 56$ кВ), на базе которого 4 июня 2009 года без остановки и разборки циклотрона для проведения дополнительных магнитных измерений был успешно ускорен и выведен из циклотрона пучок протонов, предназначенный для лечения меланомы глаза у пациентов. При этом, измеренная кинетическая энергия ускоренных протонов в камере облучения достигла требуемого значения $E_k \sim 60$ МэВ (по результатам измерений, проведённых подразделением протонной терапии ИЯФ

ПАН). Диапазон изменения тока в главной катушке, при котором ток выведенного пучка сохраняет не менее 90% от своего максимального значения, составил от $I_{main,exp} = 575.9$ А до $I_{main,exp} = 577.3$ А, что говорит о правильном выборе значения тока в главной катушке $I_{main,optimum} = 576.14$ А, при котором пучок имеет форму идеального круга в поперечном сечении. При значении тока в главной катушке $I_{main,optimum} = 576.3$ А, выведенный пучок имеет максимальное значение своего тока при незначительном искажении формы идеального круга в своём поперечном сечении. После экспериментальной подстройки токов в гармонических катушках коррекции первой гармоники результирующего магнитного поля (после экспериментальной настройки системы вывода) можно будет определить окончательное оптимальное значение тока в главной катушке $I_{main,optimum}$, при котором выведенный пучок будет иметь как форму идеального круга в поперечном сечении, так и максимальное значение своего тока. После пяти месяцев эксплуатации АИЦ-144 в режиме работы, полученном 04 июня 2009 года, уход значения тока выведенного пучка, измеренного на выходе из циклотрона, при том же значении тока ижекции составил $\Delta I_{beam,out} \sim 2\%$, что говорит о хорошей устойчивости смоделированного

режима работы циклотрона (по результатам измерений, проведённых Циклотронным Отделом ИЯФ ПАН).

Список литературы

- [1] Дж. Ливингуд. Принципы работы циклических ускорителей. // Издательство иностранной литературы, Москва, 1963.
- [2] Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы // БИНОМ, Москва, 2006.
- [3] M.M.Gordon. Calculation of Isochronous Fields for Sector-Focused Cyclotrons // Particle Accelerators, 1983. **V.13**. P. 67-84.
- [4] В.Ф.Формалёв, Д.Л.Ревизников. Численные методы // ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2004.
- [5] И.В.Амирханов, Г.А.Карамышева, И.Н.Киян, Я.Суликовский. Моделирование требуемых режимов работы и анализ их устойчивости для многоцелевых изохронных циклотронов. // Письма в ЭЧАЯ, 2009. **Т.6**, № 6(155). С. 805-813.
- [6] E.Bakewicz, A.Budzanowski, R.Taraszkiewicz. AIC-144 cyclotron: present status // NUKLEONIKA, 2003. No 48(SuPlement 2):S117-S121.
- [7] Е.Схвабэ, Б.Габаньска, Ю.Цемпка, И.Домбровска, Е.Стажевски. Магнитная система автоматического изохронного циклотрона АИЦ-144 // Тр. Международного рабочего совещания по технике изохронных циклотронов, 1978. Краков, Польша. С.237-256.