Новое правило построения квадратичных функционалов для решения методом конечных элементов относительно векторов-функций краевых задач с системой из двух уравнений первого порядка в дивергентной и вихревой формах

О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева

e-mail: yuldash@cv.jinr.ru, juldash@cv.jinr.ru,

Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ, Дубна

1. Введение. При решении краевых задач, содержащих систему из двух уравнений первого порядка в дивергентной и вихревой формах относительно векторов-функций, использование обычного подхода с формулой Грина приводит к смешанному методу [1]-[3]. Эффективные итерационные процессы для решения больших алгебраических систем, возникающих при этом, пока не разработаны. Использование минимизации квадратичного функционала в рамках метода конечных элементов в линейном случае приводит либо к дополнительным неизвестным, либо, в результате дискретизации, - к алгебраическим системам с матрицами,не являющимися разреженными [3], а в нелинейном случае не гарантирует строгую выпуклость функционала (а следовательно, монотонность оператора, соответствующего задаче). В нашем сообщении предлагается новое правило построения квадратичных функционалов в рамках метода конечных элементов. Оно основано на теореме 1 о поведении векторов-функций. Главным достоинством предлагаемого подхода является то, что в нелинейном случае он гарантирует строгую выпуклость квадратичного функционала. Дальнейшее построение конечно-элементных систем и обоснование сходимости приближённых решений к точным решениям задач можно проводить в рамках известных теорем о строго выпуклых, непрерывных и коэрцитивных функционалах в гильбертовых пространствах [4]-[6]. Данная публикация является продолжением работ [7]-[10].

2. Описание поведения векторов-функций. Предлагаемое правило построения квадратичных функционалов основано на разложении непрерывно-дифференцируемых векторов-функций в соответствии с теоремой 1. Перед формулировкой теоремы, введём следующие обозначения:

$$C_{pd} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; p \in C(\Omega) : (p\nabla \cdot \vec{u}) \in C(\Omega)\},$$

$$C_{pr} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; p \in C(\Omega) : (p\nabla \times \vec{u}) \in C(\Omega)^3\},$$

$$I_{dp} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; p \in C^1(\Omega) : \nabla \cdot (p\vec{u}) \in C(\Omega)\},$$

$$I_{rp} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; p \in C^1(\Omega) : \nabla \times (p\vec{u}) \in C(\Omega)^3\},$$

а также

$$Ker(div, \Omega) = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3 : \nabla \cdot \vec{u} = 0\},$$

$$C_{Qr} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; \vec{Q} \in C(\Omega)^3 : (\vec{Q}\cdot\nabla\cdot\vec{u}) \in C(\Omega)\},$$

$$I_{dQ} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; \vec{Q} \in C(\Omega)^3 : (\nabla\cdot(\vec{Q}\times\vec{u})) \in C(\Omega)\},$$

$$I_{gQ} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; \vec{Q} \in C(\Omega)^3 : (\nabla(\vec{Q}\cdot\vec{u})) \in C(\Omega)^3\},$$

$$I_{rQ} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; \vec{Q} \in C(\Omega)^3 : (\nabla \times (\vec{Q} \times \vec{u})) \in C(\Omega)^3\},$$

$$C_{Q*g} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; \vec{Q} \in C(\Omega)^3 : ((\vec{Q}\cdot\nabla)\vec{u}) \in C(\Omega)\},$$

$$C_{Q*r} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; \vec{Q} \in C(\Omega)^3 : (\vec{Q} \times (\nabla \times \vec{u})) \in C(\Omega)^3\},$$

$$C_{Qd} = \{\vec{u} \in C^1(\Omega)^3; \vec{Q} \in C(\Omega)^3 : (\vec{Q}\nabla\cdot\vec{u}) \in C(\Omega)^3\}.$$

Теорема 1. *Пусть для* $\vec{u} \in C^1(\Omega)^3$

$$\vec{u} = \vec{e}(\vec{u} \cdot \vec{e}) + \vec{e} \times (\vec{u} \times \vec{e}), \quad |\vec{e}| = 1,$$

тогда:
1) если $\vec{e} = \nabla p$, $p \in C^1(\Omega)$, *то*

$$\vec{u} \cdot \vec{e} \in P_{grad}(\Omega) \equiv \{I_{dp} \bigcup C_{pd}\}, \tag{1}$$

$$\vec{u} \times \vec{e} \in P^*_{grad}(\Omega) \equiv \{I_{rp} \bigcup C_{pr}\}; \tag{2}$$

2) если $\vec{e} = \nabla \times \vec{Q}$, $\vec{Q} \in Ker(div, \Omega)$, *то*

$$\vec{u} \cdot \vec{e} \in P_{rot}(\Omega) \equiv \{I_{dQ} \bigcup C_{Qr}\}, \tag{3}$$

$$\vec{u} \times \vec{e} \in P^*_{rot}(\Omega) \equiv \{I_{gQ} \bigcup I_{rQ} \bigcup \bigcup C_{Q*g} \bigcup C_{Q*r} \bigcup C_{Qd}\}; \tag{4}$$

3) если $\vec{e} = \nabla p + \vec{Q}$, $p \in C^1(\Omega), \vec{Q} \in Ker(div, \Omega)$, *то*

$$\vec{u} \cdot \vec{e} \in P_{grad}(\Omega) \bigcup P_{rot}(\Omega), \tag{5}$$

$$\vec{u} \times \vec{e} \in P^*_{grad}(\Omega) \bigcup P^*_{rot}(\Omega). \tag{6}$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на разложении произвольного вектора $\vec{u}$ по направленям единичного вектора $\vec{e}$ и ему перпендикулярному, а также на использовании известных формул векторного анализа [11].

Из теоремы следуют возможные формулировки краевых задач для определения вектор-функции $\vec{u}$. Так, из (1) и (2) вытекает абстрактная формулировка внутренней краевой задачи

$$\nabla \cdot (a_1(x,\vec{u})\vec{u}) = f(x,\vec{u}), \quad x \in \Omega;$$

$$\nabla \times (a_2(x,\vec{u})\vec{u}) = \vec{F}(x,\vec{u}), \quad x \in \Omega; \tag{7}$$

$$\alpha(x)\vec{n}(a_1\vec{u}\cdot\vec{n}) + \beta(x)\vec{u}\times(a_2\vec{u}\times\vec{n}) = \vec{g}_1, \quad x \in \partial\Omega,$$

где все коэффициенты и правые части предполагаются заданными.

Из (3) и (4) получаем

$$\nabla \cdot (A_1(x,\vec{u})\times\vec{u}) = f(x,\vec{u}), \quad x \in \Omega;$$

$$\nabla(A_2(x,\vec{u})\cdot\vec{u}) + \nabla\times(A_3(x,\vec{u})\times\vec{u}) = \vec{F}(x,\vec{u}), \quad x \in \Omega;$$

$$\alpha(x)\vec{n}((A_1\times\vec{u})\cdot\vec{n} + (A_2\times\vec{u})) + \tag{8}$$

$$+\beta(x)\vec{n}\times((A_3\times\vec{u})\times\vec{n}) = \vec{g}_2, x \in \partial\Omega.$$

Аналогичным образом из (5) и (6) имеем

$$\nabla\cdot(a_1(x,\vec{u})\vec{u}) + \nabla\cdot(A_1(x,\vec{u})\times\vec{u}) = f(x,\vec{u}), \quad x \in \Omega;$$

$$\nabla \times (a_2(x,\vec{u})\vec{u}) + \nabla(A_2(x,\vec{u})\cdot\vec{u}) +$$

$$+\nabla \times (A_3(x,\vec{u})\times\vec{u}) = \vec{F}(x,\vec{u}), \quad x \in \Omega;$$

$$\alpha(x)\vec{n}((a_1\vec{u}\cdot\vec{n}) + (A_1\times\vec{u})\cdot\vec{n} + (A_2\cdot\vec{u})) + \tag{9}$$

$$+\beta(x)\vec{n}\times((a_2\vec{u} + A_3\times\vec{u})\times\vec{n}) = \vec{g}_2, x \in \partial\Omega.$$

При определённых коэффициентах и правых частях все три абстрактные задачи (7)-(9) имеют смысл. Из них (7) является наиболее распространённой. Её частный случай имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (a_1\vec{u}) = f, \quad \nabla \times (a_2\vec{u}) = \vec{F}, \quad x \in \Omega; \\ \vec{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Для численного решения этой задачи рассмотрим обобщённые формулировки, которые являются основой конечно- элементных схем.

Используя подстановки $\vec{v} = a_2\vec{u}$, $\tilde{a}_1 = a_1/a_2$ или $\vec{w} = a_1\vec{u}$, $\tilde{a}_2 = a_2/a_1$ из задачи (10) можно получить две формулировки :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\tilde{a}_1\vec{v}) = f, \quad \nabla \times (\vec{v}) = \vec{F}, \quad x \in \Omega; \\ \vec{v} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\vec{w}) = f, \quad \nabla \times (\tilde{a}_2\vec{w}) = \vec{F}, \quad x \in \Omega; \\ \vec{w} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

Выбор формулировки зависит от свойств коэффициентов $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$. Далее предполагаем, что для численного решения задач в обобщённых формулировках используется метод конечных элементов с базисными функциями из гильбертовых пространств [2, 3]

$$U = \{\vec{u} \in L_2(\Omega)^3 : \nabla\cdot(\vec{u}) = 0, \nabla\times\vec{u} \in L_2(\Omega)^3,$$
$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$V = \{\vec{u} \in L_2(\Omega)^3 : \nabla \cdot (\vec{u}) \in L_2(\Omega), \nabla \times \vec{u} = 0,$$
$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0\}$$

со скалярными произведениями

$$(\vec{u},\vec{v})_U \equiv (\vec{u},\vec{v}) + (\nabla \times \vec{u}, \nabla \times \vec{v}),$$

$$(\vec{u},\vec{v})_V \equiv (\vec{u},\vec{v}) + (\nabla \cdot \vec{u}, \nabla \cdot \vec{v}).$$

Будем считать, что $f \in L_2(\Omega)$, $\vec{F} \in L_2(\Omega)^3$ и правые части систем (11), (12) удовлетворяют необходимым условиям для разрешимости этих систем в пространствах U, V соответственно.

3. Системы уравнений с ненулевыми в любой точке области градиентами от коэффициентов.

Рассмотрим систему (11) в предположении, что $\nabla\tilde{a}_1 \neq 0$, $x \in \Omega$, где градиент берётся по пространственным переменным. Пусть $\vec{e}_1 \equiv \nabla\tilde{a}_1/|\nabla\tilde{a}_1|^2$ и

$$0 < \sigma_1 \le |\vec{e}_1| \le \sigma_2, \quad \sigma_i = const, i = 1, 2. \tag{13}$$

Если $\vec{v} \in U$, то в соответствии с первым пунктом теоремы 1 имеем разложение $\vec{v} = \vec{v}_* + \vec{v}_0$, где

$$\vec{v}_* \equiv \vec{e}_1\nabla\cdot(\tilde{a}_1\vec{v}), \quad \vec{v}_0 \equiv \vec{e}_1\times(\vec{v} \times \nabla\tilde{a}_1).$$

Отсюда для формулировки (11) следует эквивалентная задача:

$$\begin{cases} \vec{v}_* = \vec{e}_1 f, \quad \nabla\times\vec{v} = \vec{F}, \quad x \in \Omega; \\ \vec{v} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Для уравнений этой задачи составляем функционал

$$F_1(\vec{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} [(\vec{v}_* - \vec{e}_1 f)^2 + (\nabla\times\vec{v} - \vec{F})^2] d\Omega.$$

Будем предполагать, что справедливы неравенства

$$0 < c_1^2 \le \frac{|\nabla\tilde{a}_1|^2(\vec{e}_1\cdot\vec{\xi})^2 + (|\nabla\times\vec{\xi}|)^2}{|\vec{\xi}|^2 + |\nabla \times \vec{\xi}|^2} \le c_2^2, \tag{14}$$

где c_1, c_2 - некоторые постоянные. В линейном случае, когда $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(x)$, после вычисления градиента функционала F_1 [4] определяем оператор и правую часть задачи в обобщенном виде:

$$(A_1\vec{v},\vec{z})_U \equiv \int\limits_{\Omega} [|\vec{e}_1|^2\nabla \cdot (\tilde{a}_1\vec{v})\nabla \cdot (\tilde{a}_1\vec{z}) +$$

$$+(\nabla\times\vec{v})\cdot(\nabla\times\vec{z})]d\Omega;\quad \vec{v},\vec{z}\in U;$$

$$(f_1,\vec{z})_U\equiv\int\limits_\Omega[|\vec{e}_1|^2 f\nabla\cdot(\tilde{a}_1\vec{z})+\vec{F}\cdot\nabla\times(\vec{z})]d\Omega.$$

Из (14) и неравенства Коши-Буняковского получаем

$$(A_1\vec{v},\vec{v})_U\geq c_1\|\vec{v}\|_U^2,\quad (A_1\vec{v},\vec{z})_U\leq c_2\|\vec{v}\|_U\|\vec{z}\|_U.$$

Поэтому из леммы 2.21 Лакса-Мильграмма и леммы 2.37 Сеа [2] следует, что уравнение

$$(A_1\vec{v}-f_1,\vec{z})_U=0 \tag{15}$$

имеет единственное решение, при каждом n существует только одно галёркинское приближение, галёркинские приближения сходятся к точному решению задачи. Скорость сходимости определяется порядком аппроксимации базисными функциями на конечных элементах.

Для нелинейного случая, когда $\tilde{a}_1=\tilde{a}_1(\vec{v})$, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Функционал $F_1(\vec{v})$, $\vec{v}\in U$, является строго выпуклым, а при выполнении неравенств (13),(14) и коэрцитивным.*

Доказательство. Докажем строгую выпуклость $F_1(\vec{v})$. Используем разложение $\vec{v}=(\vec{v})_{**}+(\vec{v})_{00}$, где

$$(\vec{v})_{**}=\vec{v}_*-\vec{e}_1 f,\quad (\vec{v})_{00}=\vec{e}_1 f+\vec{e}_1\times(\vec{v}\times\nabla\tilde{a}_1).$$

Пусть $\vec{v}_+=t\vec{v}_1+(1-t)\vec{v}_2$, где t - параметр, $\vec{v}_+$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2\in V$. Так как $\vec{v}_+=(\vec{v}_+)_{**}+(\vec{v})_{00}$ и $\vec{v}_i=(\vec{v}_i)_{**}+(\vec{v}_i)_{00}$, $i=1,2$, то получаем $(\vec{v}_+)_{**}=t(\vec{v}_1)_{**}+(1-t)(\vec{v}_2)_{**}$, а также $(\vec{v}_+)^2_{**}<t(\vec{v}_1)^2_{**}+(1-t)(\vec{v}_2)^2_{00}$. Таким образом, часть квадратичного функционала, связанная со слагаемым $(\vec{v})^2_{**}$, строго выпукла, а другая его часть строго выпукла в силу линейности.

Докажем коэрцитивность $F_1(\vec{v})$, когда $\vec{v}\in U$. Пусть выполняются условия (14). Получим оценку снизу, используя ε-неравенство

$$F_1(\vec{v})\geq\frac{1}{2}\int\limits_\Omega[(1-\varepsilon)[(\vec{v}_*)^2+(\nabla\times\vec{v})^2]+$$

$$+(1-\frac{1}{\varepsilon})[|\vec{e}_1|^2\cdot f^2+|\vec{F}|^2]]d\Omega\geq\frac{1}{2}(1-\varepsilon)c_1^2\|\vec{v}\|_U^2+$$

$$+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\varepsilon})\int\limits_\Omega[|\vec{e}_1|^2\cdot f^2+|\vec{F}|^2]d\Omega.$$

Поскольку $f\in L_2(\Omega)$, $\vec{F}\in L_2(\Omega)^3$, выполняются условия (13), то выбирая $\varepsilon\in(0,1]$, получаем $\lim\limits_{\|\vec{v}\|_U\to\infty}F_1(\vec{v})=\infty$.

Следствие. *Если функционал непрерывен в U, то получаем существование и единственность точного решения задачи и приближений Ритца для каждого n, слабую сходимость этих приближений к точному решению задачи.* Это следствие получается из теоремы 12.4 [4] и из теорем 28.2, 28.5 [5] - в более современных формулировках.

Аналогично рассматривается система (12). Предполагается, что $\nabla(\tilde{a}_2)\neq 0$, $x\in\Omega$. Пусть $\vec{e}_2\equiv\nabla\tilde{a}_2/|\nabla\tilde{a}_2|^2$ и

$$0<\sigma_3\leq|\vec{e}_2|\leq\sigma_4,\quad \sigma_i=const, i=3,4. \tag{16}$$

Используем разложение $\vec{w}=\vec{w}_*+\vec{w}_0$, $\vec{w}\in V$. Здесь

$$\vec{w}_*\equiv-\vec{e}_2\times(\nabla\times(\tilde{a}_2\vec{w})),\quad \vec{w}_0\equiv\vec{e}_2(\vec{w}\cdot\nabla\tilde{a}_2).$$

Система (12) эквивалента следующей:

$$\begin{cases}\vec{w}_*=-\vec{e}_2\times\vec{F},\quad \nabla\cdot\vec{w}=f,\quad x\in\Omega;\\ \vec{w}=0,\quad x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{17}$$

Для этой задачи составляем функционал

$$F_2(\vec{w})=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega[(\nabla\cdot\vec{w}-f)^2+(\vec{w}_*+\vec{e}_2\times\vec{F})^2]d\Omega.$$

Здесь предполагаем, что выполняются неравенства

$$0<c_3^2\leq\frac{|\nabla\tilde{a}_2|^2(\vec{e}_2\times\vec{\xi})^2+(\nabla\cdot\vec{\xi})^2}{|\vec{\xi}|^2+(\nabla\cdot\vec{\xi})^2}\leq c_4^2, \tag{18}$$

где c_3,c_4 - некоторые константы. В случае, когда система (17) линейна, вычисляя градиент F_2, получаем обобщенное уравнение $(A_2\vec{w}-f_2,\vec{z})_V=0$, где

$$(A_2\vec{w},\vec{z})_V\equiv\int\limits_\Omega[\nabla\cdot\vec{w}\nabla\cdot\vec{z}+$$

$$+|\vec{e}_2|^2(\nabla\times(\tilde{a}_2\vec{w}))\cdot(\nabla\times(\tilde{a}_2\vec{z}))]d\Omega,\quad \vec{w},\vec{z}\in V;$$

$$(f_2,\vec{z})_V\equiv\int\limits_\Omega[f\nabla\cdot\vec{z}+|\vec{e}_2|^2\vec{F}\cdot\nabla\times(\tilde{a}_2\vec{z})]d\Omega.$$

При выполнении (16),(18) оператор A_2 обладает свойствами, аналогичными свойствам A_1, только в пространстве V. Поэтому аналогичным образом получаем разрешимость обобщенного уравнения для галёркинских приближений и их сходимость к точному решению задачи.

В нелинейном случае справедлива лемма 2.

Лемма 2. *Функционал $F_2(\vec{w})$, $\vec{w}\in V$, является строго выпуклым, а при выполнении неравенств (16),(18) и коэрцитивным.*

Доказательство. Доказательство проводится по такой же схеме, как и для леммы 1.

Следствие леммы 2 аналогично следствию леммы 1.

4. Системы уравнений с ненулевыми в любой точке области коэффициентами.

Рассмотрим систему (11) в предположении, что $\tilde{a}_1 \neq 0$, $x \in \Omega$. Пусть $\vec{v} = \sum\limits_{k=1}^{3} \vec{i}_k v_k$, $\vec{e}_3 \equiv \vec{v}/(\tilde{a}_1|\vec{v}|^2)$ и

$$0 < \sigma_5 \leq (1/|\tilde{a}_1|) \leq \sigma_6, \quad \sigma_i = const, i = 5, 6. \tag{19}$$

Для $k = 1, 2, 3$ используем разложения $\nabla v_k = (\nabla v_k)_* + (\nabla v_k)_0$, где

$$(\nabla v_k)_* = -\vec{e}_3 v_k \nabla\cdot(\tilde{a}_1 \vec{v}),$$

$$(\nabla v_k)_0 = \vec{e}_3 \nabla \cdot (v_k \tilde{a}_1 \vec{v}) + \vec{e}_3 \times (\nabla v_k \times (\tilde{a}_1 \vec{v})).$$

Поскольку в выражение для векторов $(\nabla v_k)_*$, $k = 1, 2, 3$, входит левая часть системы (11), то эквивалентной для неё будет следующая задача:

$$\begin{cases} (\nabla v_k)_* = \vec{e}_3 v_k f, \quad \nabla \times \vec{v} = \vec{F} \quad x \in \Omega; \\ \vec{v} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Этой задаче будет соответствовать следующий функционал

$$F_3(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} [\sum_{k=1}^{3} ((\nabla v_k)_* - \vec{e}_3 v_k f)^2 + (\nabla \times \vec{v} - \vec{F})^2] d\Omega.$$

Предполагаем, что выполняются неравенства

$$0 < c_5^2 \leq \frac{(\nabla \tilde{a}_1 \cdot \vec{\xi})^2/(\tilde{a}_1)^2 + |\nabla \times \vec{\xi}|^2}{|\vec{\xi}|^2 + |\nabla \times \vec{\xi}|^2} \leq c_6^2, \tag{20}$$

здесь, как обычно, c_5, c_6 - константы.

Для линейного случая обобщённое уравнение будет иметь вид $(A_3 \vec{v} - f_3, \vec{z})_U = 0$ где

$$(A_3 \vec{v}, \vec{z})_U \equiv \int\limits_{\Omega} [\frac{1}{\tilde{a}_1^2} \nabla \cdot (\tilde{a}_1 \vec{v}) \nabla \cdot (\tilde{a}_1 \vec{z}) +$$

$$+ (\nabla \times \vec{v}) \cdot (\nabla \times \vec{z})] d\Omega;$$

$$(f_3, \vec{z})_U \equiv \int\limits_{\Omega} [(\frac{1}{\tilde{a}_1})^2 f \nabla \cdot (\tilde{a}_1 \vec{z}) + \vec{F} \cdot \nabla \times (\vec{z})] d\Omega.$$

При выполнении неравенств (19),(20)

$$(A_3 \vec{v}, \vec{v})_U \geq c_5 \|\vec{v}\|_U^2, \quad (A_3 \vec{v}, \vec{z})_U \leq c_6 \|\vec{v}\|_U \cdot \|\vec{z}\|_U,$$

поэтому линейное обобщенное уравнение имеет единственное решение, при каждом n существует только одно галёркинское приближение, галёркинские приближения сходятся к точному решению задачи. Для нелинейного случая справедлива лемма 3.

Лемма 3. *Функционал $F_3(\vec{v})$, $\vec{v} \in U$, является строго выпуклым, а при выполнении неравенств (19),(20) и коэрцитивным.*

Доказательство. Доказательство проводится по такой же схеме, как и для леммы 1.

Следствие леммы 3 аналогично следствию леммы 1.

Аналогично рассматривается случай, когда $\tilde{a}_2 \neq 0$, для линейной и нелинейной зависимостей.

5. Заключение. Предложен новый принцип построения квадратичных функционалов для конечно-элементного решения краевых задач, содержащих систему из двух уравнений первого порядка в дивергентной и вихревой формах, относительно векторов-функций. Новое правило гарантирует строгую выпуклость функционалов, а значит, монотонность операторов задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00738).

Список литературы

[1] В.В. Шайдуров: *Многосеточные методы конечных элементов.* М.: Наука, 1989.

[2] P. Monk: *Finite element methods for Maxwell's equations.* Oxford: Clarendon press, 2003.

[3] P.B. Bochev, M.D. Gunzburger: *Least-Squares Finite Element Methods* // Applied Mathematical Sciences, v. 166. New York: Springer, 2009.

[4] М.М. Вайнберг: *Вариационный метод и метод монотонных операторов.* М.: Наука, 1972.

[5] А. Куфнер, С. Фучик: *Нелинейные дифференциальные уравнения.* М.: Наука, 1988.

[6] Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас: *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978.

[7] E.P. Zhidkov, O.I. Yuldashev, M.B. Yuldasheva: *A projection method for solving linear problems with the divergence, curl operators and its application in magnetostatics* //Вестник РУДН. Серия "Прикладная и компьютерная математика N1(1), 2002, с.79-86.

[8] Е.П. Жидков, О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева: *Новые проекционные формулировки относительно векторов поля для решения нелинейных задач магнитостатики*// Вестник РУДН. Серия "Прикладная и компьютерная математика т.2, N 2, 2003, с. 104-115.

[9] О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева: *Новый проекционно-сеточный подход для моделирования пространственных нелинейных магнитных полей сложных магнитных систем экспериментальной физики.* Международная конференция "Тихонов и современная математика Тезисы докладов секции Математическое моделирование, с.189-199. М., МГУ, 2006.

[10] О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева: *О конечноэлементном подходе относительно векторов поля для расчетов сложных магнитных систем экспериментальной физики.* // JINR LIT Scientific Report 2006-2007, JINR, Dubna, 2007, с.234-238.

[11] Г. Корн, Т. Корн: *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* М.: Наука, 1977.