

Исследование решений краевых задач и задач рассеяния для дифференциальных уравнений высокого порядка

И.В. Амирханов, Д.З. Музафаров, Н.Р. Саркар, И. Сархатов, З.А. Шарипов
Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ, Дубна

Введение

Квазипотенциальные уравнения [1] широко применяется для релятивистского описания системы двух частиц, например, кварка и антикварка. В частном случае задача сводится к исследованию краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения конечного порядка [2]. В настоящей работе проводится исследование решений краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\left[\frac{2(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dr^{2m}} + \dots + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{d^2}{dr^2} - \alpha^2 + \frac{2Z}{r} \right] \Psi(r) = 0, \quad (1)$$

при $m = 3, 4, 5, 6$ со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \Psi(0) = 0, \Psi(r \rightarrow \infty) = 0, \\ \Psi'(0) = 1, \Psi'(r \rightarrow \infty) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \Psi^{2m-1}(r \rightarrow \infty) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha^2 = -E_\varepsilon$ - собственное значение ($\alpha^2 > 0$). При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (1) есть сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение.

Алгоритм решения задачи

Решение с n узлами ищем в виде

$$\Psi(r) = r(1 - c_1 r)(1 - c_2 r)(1 - c_3 r) \dots \dots (1 - c_n r) \exp(-kr), \quad (3)$$

где $k, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ - неизвестные постоянные. Подставляя это выражение в уравнение (1) и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях r , получаем уравнение для нахождения параметра k

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m-1)!} k^{2m-1} + \dots \\ \dots + \frac{\varepsilon^4}{5!} k^5 - \frac{\varepsilon^2}{3!} k^3 + k - \frac{Z}{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

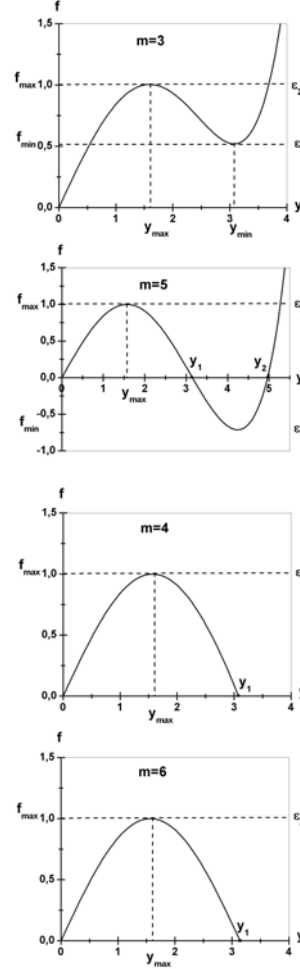


Рис. 1:

и уравнение для нахождения собственных значений α^2

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!} k^{2m-1} + \dots \\ \dots + \frac{\varepsilon^4}{6!} k^6 - \frac{\varepsilon^2}{4!} k^4 + k^2 - \alpha^2 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

и систему уравнений для нахождения $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. Например, для нахождения одноузлового решения (т.е. $c_1 \neq 0, c_2 = 0, c_3 = 0, \dots, c_n = 0$) имеем

$$c_1 = \frac{Z}{2 \left[(-1)^{m-1} \frac{(\varepsilon k)^{2m-2}}{(2m-2)!} + \dots - \frac{\varepsilon^2 k^2}{2!} + 1 \right]}. \quad (6)$$

При $n = 0$ - это безузловое решение, $n = 1$ - решение с одним узлом, $n = 2$ - решение с двумя узлами и т. д. Таким образом, алгоритм нахождения собственных функций и собственных значений краевой задачи (1)-(2) сводится к следующему:

1. Для заданных значений ε и n ищем действительные и положительные (для удовлетворения граничному условию при $r \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы $k > 0$) решения уравнения (4).

2. Подставляя найденные решения k в уравнение (5), находим собственные значения α^2 .

3. Решая систему уравнений для $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, находим ненормированное решение (3), которое удовлетворит граничным условиям $\Psi'(0) = 1$.

4. Далее мы будем изучать свойства нормированных решений. Для этого умножаем функцию Ψ на константу A , которая находится из условия $A \sqrt{\int_0^\infty \Psi^2 dr} = 1$. При этом граничное условие $\Psi'(0) = 1$ переходит в $\Psi'(0) = A$.

Действительные и положительные решения уравнения (4) существуют только при определенных ограничениях, накладываемых на параметр задачи ε . Так как не для любого ε уравнение (4) имеет действительные и положительные решения, сначала найдем ограничение на параметр ε . Для этого умножаем уравнение (4) на ε и перепишем в виде

$$f(m, y) = \frac{Z\varepsilon}{n+1}, \quad (7)$$

где $y = \varepsilon k$ и

$$f(m, y) = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} y^{2m-1} + \dots \\ \dots + \frac{1}{5!} y^5 - \frac{1}{3!} y^3 + y. \quad (8)$$

Исследуем решение (7) графически. На рис.1 представлены графики функции $f(m, y)$ для значений $m = 3, 4, 5, 6$. Для заданных значений аргументов m, y из (7), находим значение ε , например,

$$\varepsilon_1 = \frac{n+1}{Z} f_{min}(m, y_{min}), \\ \varepsilon_2 = \frac{n+1}{Z} f_{max}(m, y_{max}), \quad (9)$$

Из рис.1 для случая $m = 3$, следует, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ уравнение (4) имеет одно действительное и положительное решение; при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ три таких решения и, наконец, при $\varepsilon_2 < \varepsilon < \infty$ опять одно такое решение. Аналогично из рис.1 можно найти область ограничения на ε при $m = 4, 5, 6$ (подробно смотри[3]).

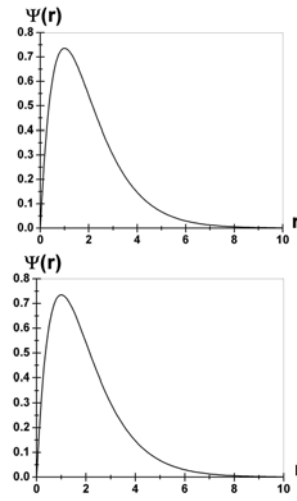


Рис. 2:

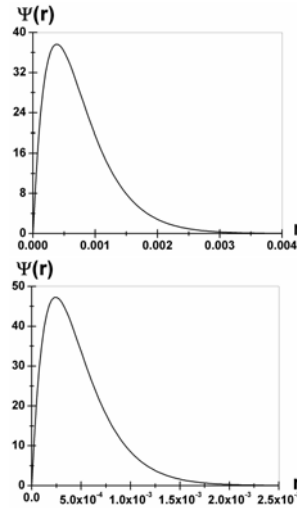


Рис. 3:

В [3] используя полученные ограничения на параметр для различных значений m ($m = 3, 4, 5, 6$), подробно рассмотрено свойства решений в частном случае ($n = 0$ - безузловое решение, $n = 1$ - решение с одним узлом).

В работе [4] предложен алгоритм решения задачи рассеяния для дифференциального уравнения четвертого порядка ($m = 2$) с малым параметром ε при старшей производной в сферической прямоугольной потенциальной яме. Для различных значений энергии E проведен сравнительный анализ фазы рассеяния δ уравнения четвертого порядка с фазы рассеяния $\delta_{шр}$ уравнения Шредингера при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. Табл. 1).

Заключение

Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE. Установлено, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ некоторые решения стре-

Таблица 1:

| E | δ_1 | δ_2 | δ_3 |
|-----|-----------------------|-------------------------|--------------------------|
| | при $\varepsilon = 1$ | при $\varepsilon = 0,1$ | при $\varepsilon = 0,01$ |
| 2 | -1,56128 | -1,30497 | -1,30135 |
| 4 | 0,95108 | 1,36483 | 1,37714 |
| 6 | 0,73007 | 1,24306 | 1,25150 |
| 8 | 0,65730 | 0,99413 | 1,00262 |
| 10 | 0,58564 | 0,92015 | 0,93736 |
| 12 | 0,50458 | 0,89595 | 0,91034 |
| 14 | 0,43270 | 0,80814 | 0,81150 |
| 16 | 0,37942 | 0,71874 | 0,73277 |
| 18 | 0,34470 | 0,69421 | 0,71604 |
| 20 | 0,32350 | 0,68774 | 0,70788 |

| $\delta_{\text{шр}}$ | $\delta_1 - \delta_{\text{шр}}$ | $\delta_2 - \delta_{\text{шр}}$ | $\delta_3 - \delta_{\text{шр}}$ |
|----------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| -1,30129 | -2,5999E-1 | -3,676E-3 | -6,0E-5 |
| 1,37725 | -4,2617E-1 | -1,242E-2 | -1,1E-4 |
| 1,25156 | -5,2149E-1 | -8,502E-3 | -6,0E-5 |
| 1,00272 | -3,4542E-1 | -8,588E-3 | -1,0E-4 |
| 0,93754 | -3,5190E-1 | -1,739E-2 | -1,8E-4 |
| 0,91049 | -4,0591E-1 | -1,453E-2 | -1,5E-4 |
| 0,81166 | -3,7896E-1 | -3,520E-3 | -1,6E-4 |
| 0,73292 | -3,5350E-1 | -1,418E-2 | -1,5E-4 |
| 0,71627 | -3,7157E-1 | -2,205E-2 | -2,3E-4 |
| 0,70811 | -3,8461E-1 | -2,037E-2 | -2,3E-4 |

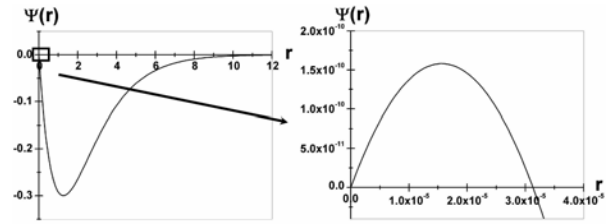


Рис. 4:

мятся к решениям нерелятивистского уравнения Шрёдингера (рис.2). Кроме этого, обнаружены так называемые погранслойные решения (рис.3); переход одного типа решения (например, решение с одним узлом) в другой (решение без узлов)(рис.4). Эти решения требуют глубокого анализа и дальнейшего физического осмысления (физической интерпретации), так как релятивистские поправки собственных значений $\Delta = |\lambda_{n,2m} - \lambda_{n,2}|$ становятся большими.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты №07-01-00738-а и 08-01-00800-а.

Список литературы

- [1] В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касымов, Н.Б. Скачков. ЭЧАЯ, 1972. Т. 2, №3, С. 637.
- [2] И.В. Амирханов, Е.П. Жидков, Д.З. Музафаров и др. // Математическое моделирование, 2007. Т. 19, № 11, С. 65-79.
- [3] И.В. Амирханов, Е.П. Жидков, Д.З. Музафаров и др. // Препринт ОИЯИ Р11-2009-150, Дубна, 2009.
- [4] И.В. Амирханов, Д.З. Музафаров, Н.Р. Саркар и др. // Препринт ОИЯИ Р11-2009-176, Дубна, 2009.