

Численный анализ модели длинных джозефсоновских контактов, описываемой двойным уравнением sine-Gordon

П.Х. Атанасова¹, Е.В. Земляная¹, Т.Л. Бояджиев², Ю.М. Шукринов²

¹e-mail: poli@jinr.ru, Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ, Дубна; ²Лаборатория теоретической физики, ОИЯИ, Дубна

Постановка задачи. Целью работы является математическое моделирование статических распределений магнитного потока в длинных джозефсоновских контактах с учетом второй гармоники в разложении джозефсоновского тока в ряд Фурье.

Многообразие физических свойств джозефсоновских контактов является основой современной сверхпроводящей электроники. Известно, что для туннельных джозефсоновских контактов типа SIS (сверхпроводник – изолятор – сверхпроводник) зависимость ток – разность фаз является синусоидальной функцией. При уменьшении прозрачности барьера возможно отклонение от этой зависимости, которое в общем случае может рассматриваться в виде разложения в ряд Фурье [1] по синусам. Учет высших гармоник в данном разложении существен, например, в контактах типа SNINS и SFIFS, где N это нормальный металл, а F – ферромагнетик [2].

Как показано в [3], для широкого класса джозефсоновских контактов сверхпроводящий ток Джозефсона как функция магнитного потока φ (разности фаз волновых функций сверхпроводников) может быть представлен в виде ряда по синусам. Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в этом разложении, нетрудно показать [4], что распределение величины $\varphi(x)$ вдоль оси x контакта в статическом режиме [3] удовлетворяет двойному уравнению sine-Gordon (далее для краткости используем сокращение 2SG)

$$-\varphi'' + a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi - \gamma = 0, \quad x \in (-l; l). \quad (1)$$

Здесь и ниже штрихом обозначено дифференцирование по координате x . Величина γ есть внешний ток, l есть полудлина контакта, а a_1 и a_2 – параметры, зависящие от технологии изготовления контакта [1, 5]. Все величины являются безразмерными.

В случае in-line геометрии контакта граничные условия для уравнения (1) имеют вид

$$\varphi'(\pm l) = h_e, \quad (2)$$

где h_e внешнее магнитное поле.

С математической точки зрения переход контакта в динамический режим [3] рассматривается [6, 7] как потеря устойчивости (бифуркация)

некоторого из статических решений $\varphi(x)$ задачи (1), (2) при варьировании одного из параметров γ или h_e . При этом минимальное собственное значение (МСЗ) λ_{min} , порожденной этим решением задачи Штурма-Лиувилля (ЗШТЛ)

$$-\psi'' + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad \psi'(\pm l) = 0 \quad (3)$$

с потенциалом $q(x) = a_1 \cos \varphi + 2a_2 \cos 2\varphi$, обращается в нуль.

Метод численного исследования. Численное решение граничной задачи (1),(2) проводилось на основе непрерывного аналога метода Ньютона [7]. На каждом итерационном шаге ньютоновской схемы соответствующая линейаризованная задача решалась с использованием сплайн-коллокационной разностной схемы второго порядка точности [8]. Дискретизация ЗШТЛ (3) осуществлялась с помощью конечно-разностных формул второго порядка. Для вычисления первых нескольких собственных значений полученной алгебраической трехдиагональной задачи применялась стандартная подпрограмма пакета EISPACK.

Обсуждение численных результатов. Учет второй гармоники $a_2 \sin 2\varphi$ приводит к тому, что для $\gamma = 0$ и $h_e = 0$, кроме известных в традиционном случае ($a_2 = 0$) тривиальных решений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (ниже обозначаются через M_0 и M_π , соответственно), существуют еще два решения $\varphi = \pm \arccos(-a_1/2a_2)$ (обозначаемые как $M_{\pm ac}$). Соответствующие МСЗ как функции коэффициентов 2SG-уравнения имеют вид $a_1 + 2a_2$, $-a_1 + 2a_2$ и $(a_1^2 - 4a_2^2)/2a_2$ соответственно. Экспоненциальная устойчивость этих константных решений (КР) определяется знаками параметров a_1 и a_2 и отношением параметров a_1/a_2 . На рис. 1 демонстрируются зависимости величины λ_{min} от внешнего тока γ для КР при нескольких положительных значениях параметра a_2 . Хорошо просматривается рождение устойчивых состояний $M_{\pm ac}$ внешним током γ при $a_2 > 0.5$.

Важную роль для физики контакта играют флюксонные решения. Различные распределения магнитного потока в джозефсоновских контактах рассмотрены в обзоре [7]) В малых внешних полях h_e таковыми являются флюксон Φ^1 , антифлюксон Φ^{-1} и связанные состояния $\Phi^1\Phi^{-1}$ и $\Phi^{-1}\Phi^1$. При увеличении внешнего магнит-

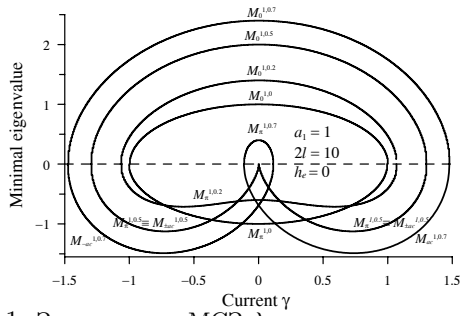


Рис. 1: Зависимость МСЗ λ_{min} от внешнего тока γ для КР при фиксированных значениях $a_1 = 1$, $h_e = 0$ и $2l = 10$ и при разных значениях параметра a_2

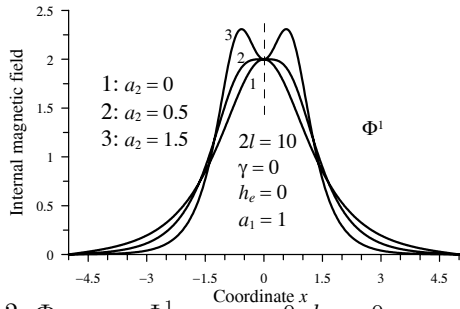


Рис. 2: Флюксон Φ^1 при $\gamma = 0$, $h_e = 0$ и $a_1 = 1$ при изменении параметра a_2

ного поля h_e появляются другие, более сложные устойчивые флюксонные состояния – двух-флюксонные $\Phi^{\pm 2}$, трех-флюксонные $\Phi^{\pm 3}$ и т.д., а также их связанные состояния.

На рис. 2 демонстрируется деформация производных решений под влиянием параметра a_2 . При $a_2 = 0.5$ кривая внутреннего магнитного поля $\varphi'(x)$ имеет в окрестности центра $x = 0$ плато. Дальнейшее возрастание параметра a_2 приводит к формированию двух максимумов магнитного поля. Тем самым, учет коэффициента a_2 приводит к качественному изменению вида флюксонного распределения Φ^1 .

При изменении коэффициента a_2 число флюксонов [7]

$$N(p) = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi(x) dx,$$

соответствующих распределению Φ^1 , сохраняется, т.е.,

$$\frac{\partial N}{\partial a_2} = 0.$$

Здесь и ниже через $p = (l, a_1, a_2, h_e, \gamma)$ обозначена совокупность параметров задачи. При этом значение $N[\Phi^1] = 1$.

В свою очередь, при увеличении параметра a_2 полный магнитный поток [7]

$$\Delta\varphi(p) = \varphi(l) - \varphi(-l)$$

для этого же решения стремится к 2π , что соответствует полному магнитному потоку флюксона в бесконечном контакте $\Phi_\infty^1 = 4 \arctan \exp(x)$ при $a_2 = 0$. При этом значение магнитного потока $\varphi(x)$ в середине интервала не меняется, т.е., $\varphi(0) = \pi$. На рис. 3 показана зависимость МСЗ

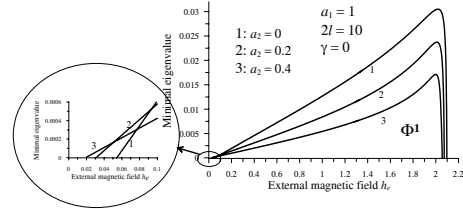


Рис. 3: Зависимость МСЗ от внешнего поля h_e для флюксонных решений Φ^1 при $\gamma = 0$, $a_1 = 1$ и нескольких значениях параметра a_2

λ_{min} от внешнего тока γ для флюксонных решений вида Φ^1 при фиксированном значении параметра $a_1 = 1$ и при разных положительных значениях параметра a_2 . Указанная зависимость качественно аналогична той, что имеет место в традиционной модели с $a_2 = 0$, но величина максимального критического тока этого распределения в рассматриваемом случае меньше. При достаточно малых по модулю h_e флюксонные решения Φ^1 являются неустойчивыми. С увеличением значений параметра a_2 (учет второй гармоники в токе Джозефсона) граница области устойчивости сдвигается в сторону меньших значений магнитного поля.

Список литературы

- [1] Golubov A.A., Kuyriyanov M.Yu., P'ichev E. // Rev. Mod. Phys, 2004 V. 76, P. 411
- [2] Ryazanov V.V. et al // Phys. Rev. Lett, 2001, V. 36, P. 2427
- [3] Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, ГРФМЛ, 1985.
- [4] Hatakenaka N. et al // Physica B, 2000, V. 284-288, P. 563
- [5] Buzdin A., Koshelev A.E. // Phys. Rev. B, 2003, V. 67, P. 220504R
- [6] Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. // ЖЭТФ, 1984, Т. 86, вып. 4, С. 1527
- [7] Пузынин И.В. et al // ЭЧАЯ, 2007. Т. 38, вып. 1, С. 144
- [8] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, ГРФМЛ, 1980.