Об одном классе аналитических решений для двухкомпонентных моделей типа "реакция - дрейф - диффузия"

В.Н. Робук, В.С. Рихвицкий

e-mail: robuk@jinr.ru, Laboratory of Information Technologies, JINR, Dubna

Предметом исследования являются двухкомпонентные системы связанных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial W_1}{\partial T} = a_{1p}\frac{\partial^2 W_p}{\partial X^2} + (b_{1q} + b_{1pq}W_p)\frac{\partial W_q}{\partial X} + c_1 + c_{1n}W_n + c_{1np}W_nW_p + c_{1npq}W_nW_pW_q \quad (1)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial T} = a_{2p}\frac{\partial^2 W_p}{\partial X^2} + (b_{2q} + b_{2pq}W_p)\frac{\partial W_q}{\partial X} + c_2 + c_{2n}W_n + c_{2np}W_nW_p + c_{2npq}W_nW_pW_q \quad (2)$$

в частных производных эволюционного типа. Здесь все коэффициенты постоянны. Члены при коэффициентах a описывают процесс диффузии, при коэффициентах b - нелинейности бюргерсовского типа, которые описывают гидродинамическую составляющую процессов в двухкомпонентной среде. Нелинейные функции от динамических переменных W описывают процессы взаимодействия компонент среды. По всем повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2. В рамках испльзуемых нами методов аналитическогоко исследования этих нелинейных моделей, возможно рассматривать только полиномы по W не выше третьего порядка. Однако и такого, кубического приближения уже оказывается достаточно для описания многих приложений в области физики, химии, биологии, экономике и т. п. Многочисленные примеры и обширную библиографию на эту тему можно найти например в книге [1]. Такие нелинейные модели мы будем в дальнейшем называть моделями типа "ракция-дрейф- диффузия" или моделями РДД. В этих моделях нас прежде всего интересуют решения описывающие локальные устойчивые неоднородности. Наиболее простыми функциями для описания таких решений могут послужить дробно рациональные по X функции.

Простейшая из них - это функция типа функции Рунге:

$$\frac{f_1(T)X + f_2(T)}{X^2 + f_3(T)X + f_4(T)},$$

где все $f_k(T)$ являются функциями от T с ограничениями:

$$\lim_{T\longrightarrow+\infty}\frac{f_1(T)X + f_2(T)}{X^2 + f_3(T)X + f_4(T)} = \frac{C_1X + C_2}{X^2 + C_3X + C_4}, \quad (3)$$

$$0 \le T < +\infty \quad \Longrightarrow \quad f_3^2 - 4f_4 < 0 \ , \quad (4)$$

где C_k- константы.

На сегодняшний день нельзя с полной уверенностью утверждать, что аналитическое решение можно получить при любых значениях коэффициентов модели (1-2). Однако, как выяснено в работе [2], при специальном выборе ограничений на коэффициенты, мы получаем частный случай двухкомпонентной модели РДД, допускающий линеаризацию посредством аналога подстановки Коула-Хопфа. Для двухкомпонентных сред, согласно работе [2], получаем частный случай модели РДД:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial T} &= a_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + a_{12}\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + a_{12}Q^3 - a_{21}W^3 \\ &+ (b + (a_{21} - 2a_{11})W - (a_{12} + 2a_{11})Q)\frac{\partial W}{\partial X} \\ &+ (b_1 + (a_{22} - a_{12} - a_{11})W - 3a_{12}Q)\frac{\partial Q}{\partial X} \\ &+ (c-k)W + (k+c)Q + b_2W^2 - b_1Q^2 - 2bWQ \\ &+ (a_{12} + a_{11} - a_{22})WQ^2 + (a_{11} - a_{21} - a_{22})W^2Q\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial T} &= a_{21}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + a_{22}\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + a_{21}W^3 - a_{12}Q^3 \\ &+ (b_2 - 3a_{21}W + (a_{11} - a_{21} - a_{22})Q)\frac{\partial W}{\partial X} \\ &- (b + (a_{21} + 2a_{22})W - (a_{12} - 2a_{22})Q)\frac{\partial Q}{\partial X} \\ &+ (k-c)W - (k+c)Q + b_1Q^2 - b_2W^2 + 2bWQ \\ &+ (a_{22} - a_{12} - a_{11})WQ^2 + (a_{21} + a_{22} - a_{11})W^2Q,\end{aligned} \quad (6)$$

все решения которой выражаются достаточно просто:

$$W = -\frac{1}{U+V}\frac{\partial U}{\partial X}\ Q = -\frac{1}{U+V}\frac{\partial V}{\partial X},$$

где функции U и V суть решения линейной системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \hat{L}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \begin{pmatrix} b & b_1 \\ b_2 & -b \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial X} + \begin{pmatrix} c & (k+c) \\ (k-c) & -c \end{pmatrix} \quad (8)$$

Остается только решить линейную систему (7-8) при определенных начальных условиях.

Хорошо известна формула общего решения:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \exp\left(t\hat{L}\right)\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

(Без ограничения общности мы здесь еще положили равными нулю следы матриц $\hat{B}$ $\hat{C}$.)

Оказалось, что для получения решений типа функций Рунге с требуемыми свойствами локальных неоднородностей, достаточно рассмотреть начальные условия линейной системы (7-8) в виде квадратичных полиномов по X

$$\left(\begin{array}{c} U_{T=0} \\ V_{T=0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} U_2 \\ V_2 \end{array}\right) X^2 + \left(\begin{array}{c} U_1 \\ V_1 \end{array}\right) X + \left(\begin{array}{c} U_0 \\ V_0 \end{array}\right).$$

В этом случае нет необходимости полностью вычислять явный вид оператора $\exp\left(t\hat{L}\right)$. Достаточно найти его разложение по степеням $\frac{\partial}{\partial X}$ с точностью до второго порядка. Это удалось успешно осуществить на основе метода, примененного в работе [3]. В итоге мы получили явное выражение для решения линейной системы с квадратичными начальными условиями общего вида. Наличие большого количества параметров, как самой исходной системы, так и свободных параметров начальных условий приводит к чрезвычайно громоздкому виду общего решения и мы не будем его приводить в настоящем кратком сообщении. Заметим только, что при определенных соотношениях на параметры получаются решения солитонного типа для модели РДД. В то же время наличие большого количества параметров позволяет выбрать из полученного общего решения нужные нам. Т. е. мы можем из общего вида определить условия на параметры приводящие к устойчивым локальным неоднородностям. Вот эти условия:

$$b_1 b_2 + b^2 + (a_{21} + a_{12} + a_{11} + a_{22})\, k = (a_{12} + a_{22} - a_{11} - a_{21}), \qquad (9)$$

$$2cb + b_2\,(c + k) = b_1\,(c - k), \qquad (10)$$

$$k > 0. \qquad (11)$$

Однако и при этих упрощениях решение остается достаточно громоздким. Для большей наглядности, хотя и с потерей общности, но оставляя при этом в рассмотрении главный нетривиальный момент (локальную устойчивую неоднородность), приведем здесь в качестве примера в явном виде частный случай со следующими дополнительными ограничениями:

$$a_{12} = a_{21} = b = b_1 = b_2 = 0. \qquad (12)$$

Введем еще переобозначение: $a_{11} = a_1,\ a_{22} = a_2$. Тогда условие (9) упрощается

$$(a_2 - a_1)\, c = (a_1 + a_2)\, k. \qquad (13)$$

Решение этого упрощенного условия можно записать так:

$$c = \frac{1}{2}\lambda\,(a_1 + a_2)\ , \quad k = \frac{1}{2}\lambda\,(a_2 - a_1)\ . \qquad (14)$$

Теперь для упрощенной нелинейной модели РДД

$$\frac{\partial W}{\partial T} = a_1 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2a_1\,(W + Q)\,\frac{\partial W}{\partial X} + (a_2 - a_1)\, W \frac{\partial Q}{\partial X} + \lambda a_1 W + \lambda a_2 Q + (a_1 - a_2)\, WQ\,(Q + W)\,, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = a_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + (a_1 - a_2)\, Q \frac{\partial W}{\partial X} - 2a_2\,(W + Q)\,\frac{\partial Q}{\partial X} - \lambda a_1 W - \lambda a_2 Q - (a_1 - a_2)\, WQ\,(Q + W)\,. \qquad (16)$$

У нас получается решения обозримого вида (17-18).

$$W = -\frac{\left(2\frac{a_2}{a_2 - a_1} + p\exp\left(\lambda\,(a_1 - a_2)\,T\right)\right) X + q\frac{a_2}{a_2 - a_1} + g\exp\left(\lambda\,(a_1 - a_2)\,T\right)}{X^2 + qX + s + \frac{p}{\lambda}\exp\left(\lambda\,(a_1 - a_2)\,T\right)}, \qquad (17)$$

$$Q = -\frac{\left(2\frac{a_1}{a_1 - a_2} - p\exp\left(\lambda\,(a_1 - a_2)\,T\right)\right) X + q\frac{a_1}{a_1 - a_2} - g\exp\left(\lambda\,(a_1 - a_2)\,T\right)}{X^2 + qX + s + \frac{p}{\lambda}\exp\left(\lambda\,(a_1 - a_2)\,T\right)}. \qquad (18)$$

При этом $k > 0 \Longrightarrow \lambda\,(a_1 - a_2) < 0$. Дискриминант знаменателя должен быть строго меньше нуля в течении всего времени ($0 \leq T < +\infty$): $q^2 - 4\left(s + \frac{p}{\lambda}\exp\left(\lambda\,(a_1 - a_2)\,T\right)\right) < 0$, поэтому $q^2 - 4s < 4\frac{p}{\lambda}\exp\left(\lambda\,(a_1 - a_2)\,T\right)$ и поскольку у нас $\lambda\,(a_1 - a_2) < 0$, то

$$\boxed{\text{если } 4\tfrac{p}{\lambda} > 0 \text{ , то } q^2 - 4s < 0;} \qquad (19)$$

$$\boxed{\text{если } 4\tfrac{p}{\lambda} \leq 0 \text{ , то } q^2 - 4s < 4\tfrac{p}{\lambda}.} \qquad (20)$$

Ограничения на константы в начальных условиях довольно слабые и любые решения (с учетом этих ограничений) с начальными условиями вида

$$W\,|_{T=0} = -\frac{\left(2\frac{a_2}{a_2 - a_1} + p\right) X + q\frac{a_2}{a_2 - a_1} + g}{X^2 + qX + s + \frac{p}{\lambda}}\ ,$$

$$Q\mid_{T=0}=-\frac{\left(2\frac{a_1}{a_1-a_2}-p\right)X+q\frac{a_1}{a_1-a_2}-g}{X^2+qX+s+\frac{p}{\lambda}}$$

стремятся на бесконечности по времени к одному и тому же устойчивому состоянию

$$\lim_{T\longrightarrow+\infty}W=\frac{a_2}{a_1-a_2}\frac{2X+q}{X^2+qX+s},$$

$$\lim_{T\longrightarrow+\infty}Q=-\frac{a_1}{a_1-a_2}\frac{2X+q}{X^2+qX+s}.$$

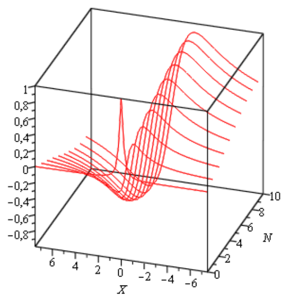

Рис. 1: Семейство $W(X,T=\frac{N}{10-N})$

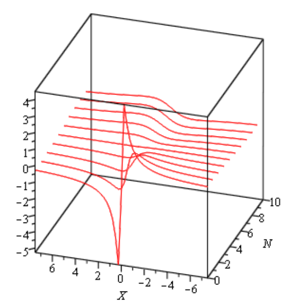

Рис. 2: Семейство $Q(X,T=\frac{N}{10-N})$

Напомним этапы упрощений.

1. Первое ограничение (5 - 6) на произвол в коэффициентах РДД (1 - 2) связано с применением метода, изложенного в работе [2].

2. Вторая группа ограничений (9 - 11) связана с нашим желанием получить систему РДД (15 - 16), в которой имеются решения описывающие локальные устойчивые неоднородности в терминах дробно рациональных функций самого простого вида.

3. И последняя группа ограничений связана с нашим желанием продемонстрировать простейший нетривиальный вариант решений (17 - 18), описывающих устойчивую локальную неоднородность.

На рисунках 1 и 2 показаны семейства графиков $W(X,T)$ и $Q(X,T)$ при $a_1=1$, $a_2=2$, $c=3/2$, $k=1/2$ с начальными распределениями

$$W(X,T=0)=\frac{1}{1+25X^2},$$
$$Q(X,T=0)=\frac{-1-50X}{1+25X^2}$$

Здесь $W(X,0)$ - классическая функция Рунге.

Список литературы

[1] Т.С. Ахромеев, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. *Структуры и хаос в нелинейных средах.* М., ФИЗМАТЛИТ. (2007).

[2] А.Е. Боровик, В.Ю. Попков, В.Н. Робук: *Образование нелинейных структур в точно решаемых диссипативных системах.* ДАН СССР (305, 4) (1989) 841-843.

[3] V.N. Robuk: *A constructive formula for function of matrix. Alternative to the Lagrange-Silvester formula.* Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A534 (2004) 319-323.