Критерий сепарабельности системы двух кубитов

В.П. Гердт[a], Ю.Г. Палий[a,b], А.М. Хведелидзе[a,c]

[a] e-mail: gerdt@jinr.ru, Лаборатория информационных технологий, Объединенный Институт Ядерных Исследований, [b] e-mail: palii@jinr.ru, Институт Прикладной Физики, Академия наук Р. Молдовы, Кишинев [c] e-mail: akhved@jinr.ru, Математический Институт им. А.М. Размадзе, Тбилиси, Грузия

Условие сепарабельности смешанных состояний 2-х кубитов сформулировано в виде системы полиномиальных неравенств на инварианты присоединенного действия группы $SU(2) \otimes SU(2)$ на пространстве матриц плотности, т.е., неотрицательно определенных эрмитовых 4×4 матрицах.

Согласно постулату квантовой теории пространство состояний $\mathcal{H}$ *композиционной системы*, представляющей собой объединение систем A и B, является подпространством тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ соответствующих подсистем:

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \,. \tag{1}$$

Это определение в сочетании с *принципом суперпозиции* допускает существование в объединенной системе корреляций, которые *не имеют классического аналога*. Классически мыслимые корреляции между подсистемами реализуются для так называемых *сепарабельных* состояний. Смешанное состояние ϱ, соответствующее объединению систем A и B является сепарабельным если матрица плотности ϱ может быть представлена (не обязательно единственным образом) как выпуклое множество произведений состояний [1]:

$$\varrho = \sum_{j=1}^{M} \omega_j \, \varrho_j^A \otimes \varrho_j^B \,, \qquad \omega_j \geq 0 \,, \qquad \sum_{j=1}^{M} \omega_j = 1 \,, \tag{2}$$

индивидуальных матриц плотности подсистем, ϱ_i^A и ϱ_i^B. Состояния, не представимые в виде (2), принято называть *запутанными или сцепленными (entangled)*.

В настоящей заметке мы обсудим вопрос об алгебраическом критерии представимости матрицы плотности 2-х кубитной системы в сепарабельной форме (2). Поскольку свойство сепарабельности, запутанности, матрицы плотности 2-х кубитов является инвариантом относительно *локальных унитарных преобразований*, действующих независимо на матрицы плотности каждой из подсистем

$$\varrho \to \varrho' = SU(2)^\dagger \otimes SU(2)^\dagger \, \varrho \;\; SU(2) \otimes SU(2) \,, \tag{3}$$

то критерий должен допускать формулировку непосредственно в терминах инвариантов присоединенного действия группы $SU(2) \otimes SU(2)$. Далее будет показано, что действительно, для смешанных состояний 2-х кубитов известный критерий сепарабельности Переса–Городецки [2, 3] может быть представлен в форме условий выполнимости системы полиномиальных неравенств на $SU(2) \otimes SU(2)$ скаляры в обертывающей алгебре $SU(4)$.

Наиболее общее состояние n-уровневой квантовой системы, *смешанное состояние*, задается $n \times n$ комплексной матрицей, матрицей плотности ϱ [4, 5], которая должна:

- ✓ *быть эрмитовой* – $\varrho = \varrho^+$,
- ✓ *иметь единичный след* – $\mathrm{Tr}(\varrho) = 1$,
- ✓ *быть неотрицательно определенной* – $\varrho \geq 0$.

Первые два условия могут быть легко реализованы в виде разложения матрицы плотности по базису алгебры $\mathfrak{su}(n)$. Так для двух кубитов матрица плотности допускает разложение в форме:

$$\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{I}_4 + \sqrt{6}\,\vec{\eta}\cdot\vec{\lambda}\right) . \tag{4}$$

В представлении (4) матрицы $\{\lambda_i\}_{i=1}^{15}$ составляют базис алгебры Ли $\mathfrak{su}(4)$, а коэффициенты разложения $\vec{\eta} = \{\eta_1, \ldots, \eta_{15}\} \in \mathbb{R}^{15}$, образуют так называемый вектор Блоха.

Третье из перечисленных выше условий на матрицу плотности, требование ее неотрицательности, определяет допустимую область значений вектора $\vec{\eta}$. Эта область представляет собой полуалгебраическое многообразие в $\mathbb{R}^{15}$, задаваемое системой полиномиальных неравенств на компоненты $\vec{\eta}$. Для вывода этих неравенств используем тот факт, что неотрицательность эрмитовой матрицы можно сформулировать в терминах коэффициентов S_k характеристического уравнения

$$|\mathbb{I}_4\, x - \rho| = x^4 - S_1 x^3 + S_2 x^2 - S_3 x + S_4 = 0 \tag{5}$$

как условие их неотрицательности [6],[7]

$$S_k \geq 0 \,, \qquad k = 1, \ldots, 4. \tag{6}$$

Кроме ограничения снизу для коэффициентов S_k существует и ограничение сверху, вытекающее из

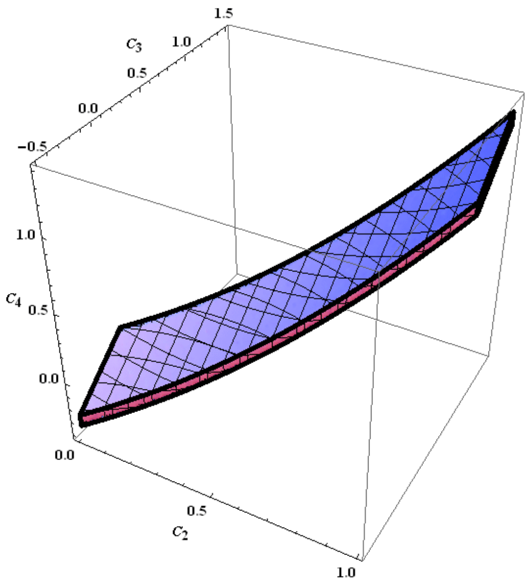

Рис. 1: Область определения матрицы плотности 2-х кубитов в пространстве инвариантов

условий нормировки $\mathrm{Tr}(\varrho) = 1\,, \quad \mathrm{Tr}(\varrho^k) \leq 1\,,$ при $k \geq 2$. Заметим, что знак равенства соответствует случаю чистых состояний и максимальные значения S_k достигаются при равных собственных значениях матрицы плотности.

Условия (6) инвариантны относительно присоединенного действия группы $SU(4)$ и могут быть записаны в терминах соответствующих инвариантов обертывающей алгебры

$$\mathfrak{C}_2 = \vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\,, \qquad \mathfrak{C}_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, d_{ijk}\eta_i\eta_j\eta_k\,,$$
$$\mathfrak{C}_4 = \frac{3}{2}\, d_{ijk}d_{lmk}\eta_i\eta_j\eta_l\eta_m\,, \tag{7}$$

где d_{ijk} - полностью симметричные структурные константы алгебры $\mathfrak{su}(4)$. Как показывает прямой расчет

$$S_2 = \frac{3}{8}(1-\mathfrak{C}_2)\,, \qquad S_3 = \frac{1}{16}(1-3\mathfrak{C}_2+2\mathfrak{C}_3)\,,$$
$$S_4 = \frac{1}{256}((1-3\mathfrak{C}_2)^2+8\mathfrak{C}_3-12\mathfrak{C}_4)\,. \tag{8}$$

Таким образом окончательно имеем следующую систему неравенств

$$\begin{array}{c} 0 \leq \mathfrak{C}_2 \leq 1\,, \\ 0 \leq 3\mathfrak{C}_2 - 2\mathfrak{C}_3 \leq 1\,, \\ 0 \leq (1-3\mathfrak{C}_2)^2 + 8\mathfrak{C}_3 - 12\mathfrak{C}_4 \leq 1\,. \end{array} \tag{9}$$

Система (9) определяет область допустимых значений инвариантов. Не приводя аналитических выражений для ее границ, дадим для наглядности лишь ее графическое представление, см. Рис.1.

Для формулировки критерия сепарабельности введем понятие частичного транспонирования. Частичное транспонирование 2-х кубитной матрицы плотности ρ определяется как операция транспонирования T в одной из подсистем, например в подсистеме B:

$$\rho^{T_B} = I \otimes T\,\rho\,. \tag{10}$$

Заметим, что под действием транспонирования матрицы Паули преобразуются следующим образом $T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \to (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3)\,.$

Критерий Переса–Городецки: *заданное 2-х кубитное состояние ρ является сепарабельным тогда и только тогда, когда частично транспонированная матрица плотности ρ^{T_B} является неотрицательно определенной.*

Для проверки сепарабельности матрицы плотности с использованием операции частичного транспонирования удобной формой представления является ее разложение по базису тензорного произведения $\mathfrak{su}(2)\otimes\mathfrak{su}(2)$

$$\rho = \frac{1}{4}\Bigg[\mathbb{I}_2\otimes\mathbb{I}_2 + \sum_{i=1}^{3} a_i\;\sigma_i\otimes\mathbb{I}_2$$
$$+\sum_{i=1}^{3} b_i\;\mathbb{I}_2\otimes\sigma + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\;\sigma_i\otimes\sigma_j\,, \tag{11}$$

где элементы базиса алгебры $\mathfrak{su}(2)$ выбраны в виде $\boldsymbol{\sigma}$-матриц Паули, коэффициенты $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются 3-х мерными блоховскими векторами индивидуальных кубитов, а вещественная 3×3 матрица $C = (c_{ij})$ служит корреляционной матрицей.

Применяя операцию частичного транспонирования (10) к разложению (11) находим , что коэффициенты $S_k^{T_B}$ характеристического уравнения для матрицы ρ^{T_B} выражаются через коэффициенты S_k в (8) и инварианты группы $SU(2)\otimes SU(2)$

$$S_2^{T_B} = S_2\,, \qquad S_3^{T_B} = S_3 - \frac{1}{4}\det(C)\,,$$
$$S_4^{T_B} = S_4 + \frac{1}{16}(\det(C) - \frac{1}{2}\mathcal{I}_4)\,, \tag{12}$$

где

$$\mathcal{I}_4 = \epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}a_i b_\alpha c_{j\beta}c_{k\gamma}\,. \tag{13}$$

В силу соотношений (12) и условий (9) неотрицательность частично транспонированной матрицы будет иметь место при выполнении неравенств

$$\begin{array}{c} 0 \leq \mathfrak{C}_2 \leq 1\,, \\ 0 \leq 3\mathfrak{C}_2 - 2\mathfrak{C}_3 - 4\det(C) \leq 1\,, \\ 0 \leq (1-3\mathfrak{C}_2)^2 + 8\mathfrak{C}_3 - 12\mathfrak{C}_4 + (\det(C) - \frac{1}{2}\mathcal{I}_4) \leq 1\,. \end{array} \tag{14}$$

Таким образом совместная система (9) и (14) дает искомую алгебрическую форму условий сепарабельности смешанных состояний 2-х кубитов в терминах инвариантов группы $SU(2) \otimes SU(2)$.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант No. 07-01-00660), Министерством Образования и Науки Российской Федерации (грант No. 5362.2006.2.) и Национальным Фондом Науки Грузии (грант GNSF/ST08/4-405).

Список литературы

[1] Werner R.F. Quantum states with Einstein-Podolski-Rosen correlations admitting a hidden-variable model// Phys. Rev. A 1989, **40** 4277-4281.

[2] Peres A. Separability criterion for density matrices// Phys. Rev. Lett. 1996, **77**, 1413-1416.

[3] Horodecki M., Horodecki P. and Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions// Phys. Lett. A. 1996, **223**, 1-8.

[4] von Neumann J. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik// Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1927, **1**, 245–272.

[5] Landau L.D. Das dämpfungsproblem in der Wellenmechanik// Z.für Physik 1927, **45**, 430-441.

[6] Kimura G. The Bloch vector for N-level systems// Phys. Lett. A 2003, **314**, 339-349.

[7] Byrd M.S. and Khaneja N. Characterization of the positivity of the density matrix in terms of the coherence vector representation// Phys. Rev. A. 2003, **68**, 062322 [13 pages].