

# Представление многочлена базисными элементами

© Н.Д. Дикусар

e-mail: dnd@jinr.ru, Лаборатория информационных технологий, ОИЯИ, Дубна

Разработан метод базисных элементов (МБЭ), в котором алгебраический многочлен представляется в форме разложения по трем квадратичным и одной кубической параболам – базисным элементам. В задачах полиномиальной аппроксимации и сглаживания МБЭ-представление позволяет понизить вычислительную сложность алгоритмов и повысить их устойчивость к ошибкам за счет выбора структуры внутренней связи между переменной и управляющими параметрами.

**Введение.** Повышение эффективности и устойчивости методов сглаживания экспериментальных данных и аппроксимации сложных функций является одной из центральных задач, как в научных исследованиях, так и в области развития современных технологий, где требуется обработка больших объемов информации в режиме реального времени.

Качество результатов аппроксимации дискретного набора данных существенно зависит от выбора базисных полиномов, равносильных в теоретическом плане, но различных по форме. Выбор той или иной формы представления связан, как правило, с устойчивостью и точностью вычислений или с общей эффективностью алгоритмов.

Понятие обусловленности является ключевым при работе с полиномами. При выполнении операций с полиномами высокой степени матрица нормальных уравнений становится плохо обусловленной, вследствие чего возникает потеря точности, приводящей к обесцениванию результатов вычислений [1, 2]. Хотя такого рода трудности устраняются с помощью полиномов Чебышева, методов ортогонализации и др., разработка методов, менее чувствительных к обусловленности задачи остается весьма актуальной.

В рамках идей 4-точечных преобразований [3, 4] получена новая форма представления многочлена  $P_n(x)$  по четырем базисным элементам – одной кубической и трем квадратичным параболам (метод базисных элементов – МБЭ). Представление  $P_n(x)$  в виде геометрических примитивов обладает рядом преимуществ в плане повышения точности и устойчивости вычислений в решении задач полиномиальной аппроксимации и сглаживания [5, 6, 7].

**1. Метод базисных элементов.** Суть метода состоит в преобразовании многочлена

$$P_n(x; \mathbf{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

в другую форму:  $P_n(x; \mathbf{a}) \rightarrow P_{n \downarrow k}(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i) =$

$\sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i$ , где  $k$  – максимальная степень  $Q$  ( $k = \lfloor n/3 \rfloor$ ,  $\lfloor a \rfloor$  – наибольшее целое  $\leq a$ ),  $Q^i \mathbf{w}^T$  – базисные функции, а  $\mathbf{r}_i = [r_{i\alpha}, r_{i\beta}, r_{i0}]^T$  – коэффициенты. Базисные элементы  $Q(x; \alpha, \beta)$  и  $\mathbf{w}^T = [w_1, w_2, w_3]$ ,  $w_j = w_j(x; \alpha, \beta)$  зависят от непрерывных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , функционально связанных с переменной  $x$ . Такая модель приносит выгоду при решении многих задач в области аппроксимации функций и обработки экспериментальных данных.

**Определение.** Функции

$$w_1 = \frac{-\tau(\tau - \beta)}{\alpha(\beta - \alpha)},$$

$$w_2 = \frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta(\beta - \alpha)}, w_3 = \frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}{\alpha\beta}, \quad (2)$$

$$Q(\tau; \alpha, \beta) = \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta), \quad (3)$$

$\tau, \alpha, \beta \in R, \alpha \neq \beta \neq 0$ , где  $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ , называются **базисными элементами**. Уравнение полиномов 0-й, 1-й и 2-й степеней, проходящих через точки  $(\alpha, r_\alpha), (\beta, r_\beta), (0, r_0)$  (при  $x_0 = 0$ ) в форме  $P_{2 \downarrow 0}(x)$  принимает вид

$$\Pi(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}) = \mathbf{w}^T \mathbf{r} = r_\alpha w_1 + r_\beta w_2 + r_0 w_3, \quad (4)$$

где  $\Pi(\nu; \alpha, \beta, \mathbf{r}) = r_\nu$ , а уравнение кубической параболы  $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  в форме  $P_{3 \downarrow 1}$ :

$$S = \Pi(x; \alpha, \beta; \mathbf{r}) + \theta Q(x; \alpha, \beta), \quad x, \alpha, \beta \in R,$$

где  $\theta$  – параметр. Представление полинома  $P_n(x; \mathbf{a})$  в форме  $P_{n \downarrow k}$  для  $n > 3$  выражает

**Теорема I.** Для заданной тройки чисел  $\{x_\alpha, x_\beta, x_0\} \in R$  и четверки базисных элементов  $\{w_1, w_2, w_3, Q\}$ , определенных формулами (2), (3) многочлен  $P_n(x; \mathbf{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  может быть представлен в виде

$$P_{n \downarrow k}(x; \mathbf{r}_i) = \Pi_0 + \Pi_1 Q + \Pi_2 Q^2 + \dots + \Pi_k Q^k, \quad (5)$$

где  $\Pi_i = \Pi_i(\tau; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$ ,  $k = \lfloor n/3 \rfloor$ ,  $\tau = x - x_0$ ,  $\alpha = x_\alpha - x_0$ ,  $\beta = x_\beta - x_0$ , а  $\mathbf{r}_i^T = [r_{i\alpha}, r_{i\beta}, r_{i0}]$  – вектор, образованный из ординат, расположенных на линиях  $\tau = \alpha$ ,  $\tau = \beta$  и  $\tau = 0$ ;  $i = \overline{0, k}$ .

Доказательство теоремы основано на вычислении  $r_{i\nu}$  по значениям  $P_n(x)$ ,  $\Pi(x)$ ,  $Q(x)$  и их производных до  $k$ -го, 2-го и 3-го порядков соответственно в точках  $\nu = \alpha, \beta, 0$ . Для этого

используются:

1) формулы представления  $\{x^j\}_{j=1}^n$  в виде [4, 7]  $x^j = \Pi(x; \alpha, \beta) + Q(x; \alpha, \beta)u_{j-3}(x)$ , где  $u_j(x)$  – элементарные симметрические функции  $u_j = (x + \alpha)u_{j-1} - \alpha x u_{j-2} + \beta^{j-3}$ ,  $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ ;  $j = \overline{3, n}$ ;

2) формулы редуцированных многочленов [5]  $U_i(x; \alpha, \beta) = \Pi_i(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i) + Q(x)U_{i+1}(x)$ , где  $\mathbf{r}_i = [U_{i\alpha}, U_{i\beta}, U_{i0}]^T$ ,  $i = \overline{1, k}$  и

3) лемма о вычислении значений  $U_i(x)$  в точках  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ ,  $x = 0$  [5]:

**Лемма.** Значения  $U_{i\nu} \equiv U_i(\nu)$  определяются через  $U_{(i-1)\nu}$ ,  $U'_{(i-1)\nu}$ ,  $\nu = \alpha, \beta, 0$  и параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma = \beta - \alpha$  в виде

$$\begin{aligned} U_{i\alpha} &= -U_{(i-1)\alpha}^+(\alpha\gamma) + U_{(i-1)\beta}/(\beta\gamma^2) - U_{(i-1)0}/(\alpha^2\beta), \\ U_{i\beta} &= U_{(i-1)\alpha}/(\alpha\gamma^2) + U_{(i-1)\beta}^+(\beta\gamma) - U_{(i-1)0}/(\alpha\beta^2), \\ U_{i0} &= -U_{(i-1)\alpha}/(\alpha^2\gamma) + U_{(i-1)\beta}/(\beta^2\gamma) + U_{(i-1)0}^+(\alpha\beta), \end{aligned}$$

где  $U_0(x) \equiv P'_n(x)$ ,  $U_{(i-1)\nu}^+ = U'_{(i-1)\nu} + \lambda_\nu U_{(i-1)\nu}$ , а  $\lambda_\nu$  выражаются через параметры  $\alpha$  и  $\beta$ . Выше приведенные формулы получаются при раскрытии соответствующих пределов

$$U_{i\nu} = \lim_{x \rightarrow \nu} \{ [U_{(i-1)}(x) - \Pi_{(i-1)}(x; \dots, \mathbf{r}_{(i-1)})] / Q(x; \dots) \}, \quad i = \overline{2, k}, \quad \nu = \alpha, \beta, 0.$$

**Следствие 1.** Наряду с (5) полином  $P_{n\downarrow k}$  может быть представлен также в виде

а) конструкции типа матрички:

$$P_{n\downarrow k}(x) = \Pi_0 + Q \underbrace{[\Pi_1 + Q[\Pi_2 + Q[\dots + Q \underbrace{\Pi_k}_{U_k} \dots]]]}_{U_2}, \quad (6)$$

б) векторной формы:

$$P_{n\downarrow k}(x; \mathbf{r}_i) = \sum_{i=0}^k \mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i = \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^3 b_{ij}(x; \alpha, \beta) r_{ij}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{b}_i = Q^i \mathbf{w} = [Q^i w_1, Q^i w_2, Q^i w_3]^T = [b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}]^T$ .

**Следствие 2.** В случае приближения функции  $f(x) \in C^{(k)}[a, b]$  полиномом  $P_{n\downarrow k}$  для вычисления  $\mathbf{r}_i$  требуется  $k = \lfloor n/3 \rfloor$  производных  $f^{(i)}$ ,  $i = \overline{0, k}$  и производные от  $\Pi_i(x)$  и  $Q(x)$  до второго-третьего порядков в точках  $x_\nu$ ,  $\nu = \alpha, \beta, 0$ .

С геометрической точки зрения, коэффициенты  $r_{i\nu}$  в (7) являются ординатами точек на линиях  $x = x_\nu$ ,  $\nu = \alpha, \beta, 0$ , причем  $r_{i\nu} = \Pi_i(\nu)$ . В зависимости от расположения  $r_{i\nu}$  на координатной плоскости, линии однозначно определяются одной, двумя или тремя точками - горизонтальная прямая, наклонная прямая или квадратичная парабола.

**2. Аппроксимация функций.** Приближение непрерывной функции полиномом в достаточно малой окрестности точки всегда надежно, тогда как в более широком промежутке оно требует большой осторожности. Использование (5) – (7) для локального приближения имеет свои особенности. Разложение  $f(x)$  по степеням  $Q = (x - x_\alpha)(x - x_\beta)(x - x_0)$  аналогично разложению  $f(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ . В формуле Тейлора значения производных и самой функции вычисляются в точке  $x_0$ , а в формулах  $P_{n\downarrow k}$  используются значения  $f(x)$ ,  $f^{(i)}(x)$  и значения базисных элементов  $\Pi_i(x)$ ,  $Q(x)$  и их производных в трех точках  $x = x_\alpha, x = x_\beta$  и  $x = x_0$ . При этом весьма важно подчеркнуть, что элементы  $w_1, w_2, w_3$  и  $Q$  зависят от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , изменяющих базис, тогда как в формуле Тейлора базис фиксирован. Рассуждения при доказательстве теоремы I, позволяют сформулировать аналогичную теорему о локальном приближении функции:

**Теорема II.** Если действительная функция  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  одного переменного имеет  $k = \lfloor n/3 \rfloor$  непрерывных производных в точках  $x_\alpha, x_\beta$  и  $x_0$ ,  $x_\alpha < x_0 < x_\beta$ , причем точки  $x_\alpha$  и  $x_\beta$  расположены вблизи границ  $[a, b]$ , соответственно, то  $f(x)$  может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i + R_{k+1}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{r}_i$  вычисляются по формулам леммы на основе  $f$ ,  $w_1, w_2, w_3$  и  $Q$  и параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . При этом остаточный член равен  $R_{k+1} = Q^{k+1} U_{k+1}(x; \alpha, \beta)$ .

**Замечание.** В разложении (8) базисные элементы зависят от параметров, изменение которых влияет на величину  $R_{k+1}$ . В этом случае  $\alpha$  и  $\beta$  являются параметрами регулирования (управления), и от их выбора зависит точность аппроксимации.

**Пример 1.** Аппроксимация  $\sin(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , ( $\alpha = -\pi, x_0 = 0, \beta = \pi, \gamma = 2\pi$ ) полиномом  $P_{5\downarrow 1}(x)$ . Так как  $\mathbf{r}_0 = [0, 0, 0]^T$ ,  $\sin'_{-\pi} = \sin'_{\pi} = -1$  и  $\sin'_0 = 1$ , то по формулам леммы найдем  $\mathbf{r}_1 = -\pi^{-2} [1/2, 1/2, 1]^T$ . После подстановки этих значений в формулу редуцированных многочленов, с учетом (2), получим  $\sin(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{r}_0 + Q \mathbf{w}^T \mathbf{r}_1 = -Q(w_1 + w_2 + 2w_3)/(2\pi^2) = -Q(1 + w_3)/(2\pi^2)$ , или  $\sin(x) \approx -x(x^2 - \pi^2)(2\pi^2 - x^2)/(2\pi^4)$ . При этом  $\max |\sin(x) - Q \mathbf{w}^T \mathbf{r}_1| < \max |\sin(x) - (x - x^3/6 + x^5/120)|$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ .

**3. Структура и свойства  $P_{n\downarrow k}$ .** Использование модели  $P_{n\downarrow k}(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$

$$f(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i, \quad (9)$$

в задачах аппроксимации  $f(x) \in C_{[a,b]}$  и сглаживания экспериментальных данных имеет ряд преимуществ при реализации соответствующих процедур.

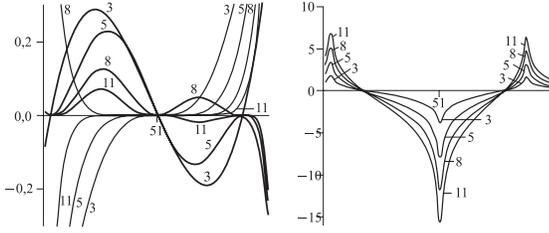


Рис. 1: Графики  $x^i$  и  $Q^i w_3(x; \alpha, \beta)$ ,  $i = 3, 5, 8, 11$ ; кривые 8 и 11 увеличены в 2 и 4 раза, соответственно (слева). Графики  $\lg|x^i/Q^i w_3|$ ;  $x \in [-1, 1]$  (справа).

Модель (9) обладает полезными свойствами, из которых наиболее важными являются:

1°. Возможность изменять базис  $\mathbf{b}_i = Q^i \mathbf{w}$  через параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. влиять на обусловленность нормальной матрицы. Абсолютные значения функций  $\{x^i\}$  и  $\{Q^i w_j\}$  различаются на порядки, что видно по графикам функций  $\lg|x^i/Q^i w_3|$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $i = 3, 5, 8, 11$ , ( $\alpha = -0,95, \beta = 0,75$ ) (рис. 1).

2°. МБЭ-модель имеет две составляющие – фиксированную ( $\mathbf{w}^T \mathbf{r}_0$ ) и свободную ( $\mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i$ ). Фиксированная составляющая ( $\mathbf{w}^T \mathbf{r}_0$ ) использует данные вместо коэффициентов при меньших степенях  $x$  с возможностью вычислений по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ , что существенно расширяет рамки алгоритмизации расчетов. Например, в зависимости от выбора параметров  $x_0, \alpha$  и  $\beta$ , модель (9) можно использовать как в статическом режиме (все параметры фиксированы), так и в динамическом (хотя бы один из параметров изменяется синхронно с  $x$ ) [6].

3°. Выбор "сопровождающих троек" из входных данных  $\{(x_\nu, r_{0\nu})\}$ ,  $r_{0\nu} = \tilde{f}_\nu$ ,  $\nu = \alpha, \beta, 0$  обеспечивает естественную привязку к кривой  $f$ . В зависимости от дисперсии входных ошибок, ординаты  $r_{0\nu}$  приравняются либо соответствующим значениям функции ( $r_{0\nu} \equiv f_\nu$ ) либо их оценкам ( $\hat{r}_{0\nu}$ ), полученным усреднением  $\tilde{f}_i$  по нескольким соседним точкам.

4°. Дробно-рациональная зависимость базисных функций от параметров позволяет повысить устойчивость к ошибкам и понизить вычислительную сложность аппроксимационных алгоритмов (для подходящих  $\alpha$  и  $\beta$  знаменатели в  $w_j$  подавляют ошибки в оценке  $\hat{\mathbf{r}}_0$ , что обеспечивает устойчивость трансформации данных). Например, модель с полиномом 5-й степени преобразуется к виду

$$\underbrace{\tilde{f}(x) - \mathbf{w}^T(x; \alpha, \beta)\hat{\mathbf{r}}_0}_{\tilde{u}(x)} \approx \mathbf{b}^T(x; \alpha, \beta)\mathbf{r}_1, \quad (10)$$

где  $\hat{\mathbf{r}}_0$  – оценка реперных ординат,  $\mathbf{b}$  – новый базис 5-й степени, а  $\mathbf{r}_1$  – вектор неизвестных коэффициентов. При этом происходит устойчивое преобразование ошибки  $e_{\tilde{f}}(x) \xrightarrow{e_0} e_{\tilde{u}}(x)$ , где  $\mathbf{e}_0 = [e_\alpha, e_\beta, e_0]^T$  – ошибки в оценке  $\hat{\mathbf{r}}_0$ , а число коэффициентов ( $\mathbf{r}_1$ ) сокращается до трех

$$\tilde{u}(x) = \mathbf{b}^T(x; \alpha, \beta)\mathbf{r}_1 + e_u(x). \quad (11)$$

Таким образом, при работе с матрицами число арифметических операций для аппроксимации данных  $\tilde{u}(x) = f(x) - \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{r}}_0 - e(x)$  сравнимо с числом операций в случае квадратичной модели.

4. Сглаживание данных. МБЭ-модель обеспечивает устойчивость вычислений к ошибкам, что подтверждается ниже, на примере сравнения результатов МНК-сглаживания точек сигнала  $S(x)$ ,  $x \in [0, 7]$  полиномом 11 степени по выборке  $\{\tilde{S}_k = S(x_k) + e_k\}_{k=1}^{300}$ , ( $e \sim N(0, \sigma), \sigma = 0,1$ ) для моделей  $P_{11}(x; \mathbf{a})$  и  $P_{11\downarrow 3}(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$ , при  $x_0 = 3,7, \alpha = -3,3, \beta = 3,1$ .

Обозначим нормальные матрицы через  $\mathbf{C}_{12 \times 12}$  и  $\mathbf{B}_{12 \times 12}$  соответственно для моделей  $S(x) \approx P_{11}(x; \mathbf{a})$  и  $S(x) \approx P_{11\downarrow 3}(x; \mathbf{r}_i)$ . Найдем оценки  $\hat{r}_{ij}$ , используя модель в форме (7) из условия

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}_{ij}} \sum_{k=1}^{300} [\tilde{S}_k - \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 b_{ijk} \hat{r}_{ij}]^2 = 0,$$

где  $b_{ijk} = Q^i(\tau_k)w_j(\tau_k)$ ,  $\tau_k = x_k - x_0$ .

Результаты сглаживания (оценка  $\hat{S}_B$ , гистограммы остатков и невязка  $S(x) - \hat{S}_B(x)$ ) показаны на рис. 2 слева. Справа приведены графики  $b_{ij}(x; \alpha, \beta)$ .

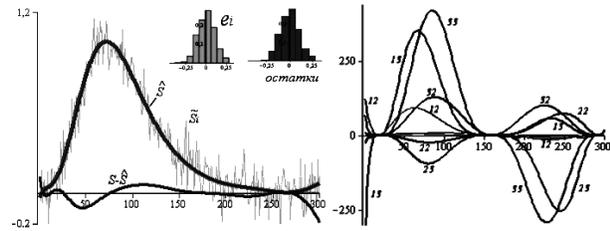


Рис. 2: Сглаживание полиномом  $P_{11\downarrow 3}(x; \mathbf{r}_i)$

Разность оценок, полученных для обеих моделей, показана на графике (рис. 3, справа). Слева – графики парабол  $\hat{\Pi}_i(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$ ,  $Q(x; \alpha, \beta)$  и оценки  $\hat{r}_{1\nu}$  для  $\hat{\Pi}_1$ . Точки пересечения  $\hat{\Pi}_i$  с вертикалями  $x = x_\nu$ ,  $\nu = \alpha, \beta, 0$  соответствуют координатам  $\hat{\mathbf{r}}_i$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_0 &= [0.0920750834, 0.0410621063, 0.188424410]^T, \\ \hat{\mathbf{r}}_1 &= [0.0178529547, 0.0101572284, 0.020526047]^T, \\ \hat{\mathbf{r}}_2 &= [0.0026828853, 0.0004179276, 0.001036583]^T, \\ \hat{\mathbf{r}}_3 &= [0.0001866736, 0.0000137170, 0.000017215]^T. \end{aligned}$$

Для  $P_{11}(x; \mathbf{a})$  данные обрабатывались процедурой *LeastSquare()* из пакета Maple.

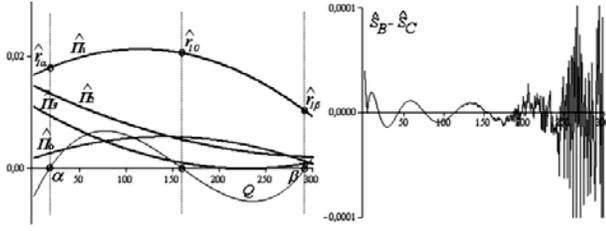


Рис. 3:  $\Pi_i(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$  и  $\hat{S}_B(x) - \hat{S}_C(x)$

Устойчивость метода к ошибкам характеризуется числом обусловленности нормальной матрицы  $\mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$  и значениями определителей  $|\mathbf{A}|$  и  $|\mathbf{A}^{-1}|$ , которые приведены в табл.1. В последних двух строках таблицы находятся

Таблица 1: Расчетные величины для матриц  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{B}$

Величина	$\mathbf{C}_{12 \times 12}$	$\mathbf{B}_{12 \times 12}$
$ \mathbf{A} $	$4,9564601 \cdot 10^{63}$	$1,4551473 \cdot 10^{49}$
$ \mathbf{A}^{-1} $	$2,01524 \cdot 10^{-64}$	$6,8721565 \cdot 10^{-50}$
$\mu(\mathbf{A})$	$9,0253085 \cdot 10^{12}$	$1,6562740 \cdot 10^7$
$\rho_e$	0,02647408101	0,02647406692
$dev$	0,3807327671	0,3807322134

значения глобальной относительной ошибки

$$\rho_e = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\tilde{S}_i - \hat{S}_i)^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^N \tilde{S}_i^2},$$

и модуль максимального отклонения оценки от истинной кривой  $dev = \max\{|S_i - \hat{S}_i|\}_{i=1}^N$  для каждой модели. Из табл. 1 видно, что при  $\rho_e(\mathbf{C})/\rho_e(\mathbf{B}) \approx 1$  и  $dev(\mathbf{C})/dev(\mathbf{B}) \approx 1$ , отношение  $\mu(\mathbf{C})/\mu(\mathbf{B}) \approx 5,449 \cdot 10^5$ , а  $|\mathbf{C}|/|\mathbf{B}| = 3.406157009 \cdot 10^{14}$  и  $|\mathbf{C}^{-1}|/|\mathbf{B}^{-1}| = 2.932474815 \cdot 10^{-15}$ , т.е. вычисления для модели с матрицей  $\mathbf{B}_{12 \times 12}$  более устойчивы к ошибкам.

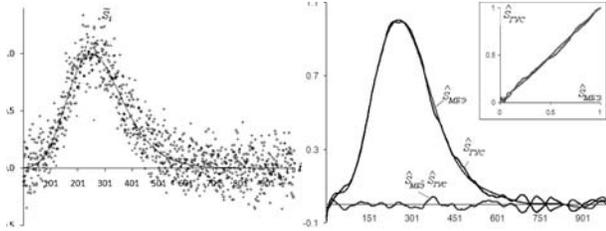


Рис. 4: Сглаживание МГК ("Гусеница") и МБЭ

Сравнение результатов сглаживания, полученных методом главных компонент [8] (МГК, пакет "Гусеница") и МНК (модель МБЭ с матрицей  $\mathbf{B}_{12 \times 12}$ ) на одном и том же наборе точек ( $N = 1000$ ) дало хорошее согласие и приведено на рис.4. Справа, в верхней части рисунка показан график точечных оценок в системе осей (МБЭ, ГУС).

**5. Рекурсивное вычисление  $\hat{\mathbf{r}}$ .** Представление полинома в форме  $P_{n \downarrow k}(\cdot)$  позволяет

снизить вычислительную сложность алгоритмов. Покажем это на примере рекурсивного РНК-вычисления  $\hat{\mathbf{r}}_1$  для модели  $P_{5 \downarrow 1}(x; \hat{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_1)$  (11) с предварительным оцениванием  $\hat{\mathbf{r}}_0$  и нормальной матрицей размерности  $3 \times 3$ .

Трансформация (10)  $\tilde{f}_i \xrightarrow{\hat{\mathbf{r}}_0} \tilde{u}_i$  переводит модель с шестью коэффициентами в модель (11) с тремя неизвестными коэффициентами  $r_j$ :

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^3 b_j r_j, \quad \text{где } b_j = Q w_j. \quad (12)$$

При вычислении оценки  $\hat{\mathbf{r}} \equiv \hat{\mathbf{r}}_1$  по РНК-алгоритму на вход подается временная последовательность точек  $\{\tilde{f}_i\}_{i=1,2,\dots}$ , упорядоченных по  $x$ , ( $x_i < x_{i+1}$ ) с неизвестным заранее  $N$ .

В работе [6] для оценки свободного параметра  $\theta$  кубической модели использовался режим вычисления по параметрам, где  $\alpha$  и  $\beta$  синхронно изменялись с  $x_n$  при фиксированном  $x_0$ . Здесь рассматривается схема, в которой все параметры фиксированы, а оценки реперных ординат  $\hat{\mathbf{r}}_0$  предварительно вычисляются по  $2J + 1$  соседним ординатам в виде  $\hat{r}_{0\nu} = \frac{1}{2J+1} \sum_{j=-J}^J \tilde{f}_j, \nu = \alpha, \beta, 0$ . Полученную оценку  $\hat{\mathbf{r}}_0$  используем для трансформации данных:  $\tilde{u}_i = \tilde{f}_i - \hat{r}_{0\alpha} w_{1i} - \hat{r}_{0\beta} w_{2i} - \hat{r}_{00} w_{3i}, i = \overline{1, N}$ .

При вычислении  $\tilde{u}_i$  ошибки преобразуются по формуле  $e_{u_i} = (e_i - e_\alpha w_{1i} - e_\beta w_{2i} - e_0 w_{3i})$ , где  $e_i$  – ошибка  $f_i$ , а  $e_\alpha, e_\beta$  и  $e_0$  – ошибки в  $\hat{\mathbf{r}}_0$ .

В адаптивной процедуре вычисления оценки параметров на текущем шаге используется значение ошибки  $\varepsilon_n$ , полученное на предыдущем шаге [9].

При рекурсивном вычислении оценки  $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$  на вход РНК-алгоритма поступает последовательность  $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots\}$  с ошибкой на выходе  $n$ -го шага  $\varepsilon_n = \tilde{u}_n - \mathbf{b}_n^T \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)}, n = 1, 2, \dots$ . Критерием оптимальности  $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$  служит условие  $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 \rightarrow \min_{\hat{\mathbf{r}}}$ .

Алгоритм рекурсивного вычисления оценки  $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$  для модели (12) на  $n$ -м шаге запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \tilde{f}_n - \hat{\Pi}_{0n}, \\ \mathbf{k}_n &= \mathbf{\Omega}_{n-1} \mathbf{b}_n [1 + \mathbf{b}_n^T \mathbf{\Omega}_{n-1} \mathbf{b}_n]^{-1}, \\ \hat{u}_n &= \mathbf{b}_n^T \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)}, \\ \varepsilon_n &= \tilde{u}_n - \hat{u}_n, \\ \hat{\mathbf{r}}^{(n)} &= \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)} + \mathbf{k}_n \varepsilon_n, \\ \mathbf{\Omega}_n &= \mathbf{\Omega}_{n-1} - \mathbf{k}_n \mathbf{b}_n^T \mathbf{\Omega}_{n-1}, \\ \mathbf{\Omega}_0 &= \sigma \mathbf{I}, \hat{\mathbf{r}}^{(0)} = 0, n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  – вектор данных размерности  $n \times 1$ ,  $\mathbf{b}_n = [Q_n w_{1n}, Q_n w_{2n}, Q_n w_{3n}]^T, \mathbf{\Omega}_n = [\mathbf{B}_n^T \mathbf{B}_n]^{-1}$

размерности  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{V}_n$  – матрица значений базисных функций  $\mathbf{b}_n$  размерности  $n \times 3$ ,  $\mathbf{k}_n = [K_1, K_2, K_3]^T$  – коэффициент усиления.

**Пример 2.** Понижение вычислительной сложности РНК-алгоритма с использованием модели  $P_{5\downarrow 1}(\cdot)$  покажем на примере обработки выборки точек  $\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^{500}$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $h = 0,0088$ , рассеянных вокруг полинома  $P_5 = 0,03(x^5 + 3,5x^4 - 12,71x^3 - 22,725x^2 + 29,325x + 46,41)$ ,  $x \in [-1,7, 2,7]$ .

Оценка  $\hat{r}_0$  получена усреднением по 11 соседним точкам для  $\alpha = -1,55$ ,  $x_0 = 0,01$ ,  $\beta = 2,1$ :  $\hat{r}_0 = [0,1976281418, -0,06080134616, 1,312190607]^T$ , и на ее основе исходные данные преобразованы по формуле  $\tilde{u}_i = \tilde{S}_i - \mathbf{w}^T(x_i; \alpha, \beta)\hat{r}_0$  (рис. 5). Устойчивость такого преобразования подтверждается совмещенными гистограммами ошибок  $e_{\tilde{S}}$  и  $e_{\tilde{u}}$  на рис. 5. Там же показаны графики базисных функций  $b_j(x)$ . Процесс вычисления

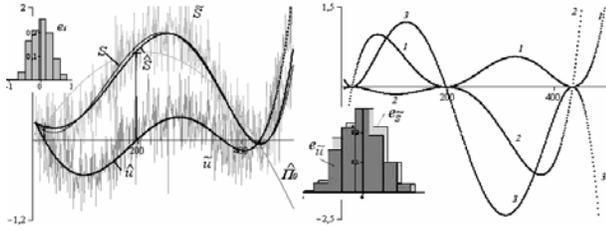


Рис. 5: Входные ( $\tilde{S}$ ) и модифицированные ( $\tilde{u}$ ) данные,  $\hat{\mathbf{r}}_0$  и оценки  $\hat{S}$ ,  $\hat{u}$  (слева). Базисные функции  $b_j$  (справа)

оценки  $\hat{\mathbf{r}}$  показан на графиках траекторий  $r_j, j = 1, 3$  (рис. 6, слева). Графики коэффициентов усиления  $K_j$  и гистограммы остатков для исходных  $\tilde{S}$  и преобразованных  $\tilde{u}$  данных приведены справа на рис. 6, а графики коррекции ошибок  $\epsilon_n = \tilde{u}_n - \hat{u}_n$  – на рис. 7. Полученный в результате таких расчетов вектор  $\hat{\mathbf{r}} = [-0,2780076451, 0,1681186476, -0,2507904166]^T$  вместе с  $\hat{\mathbf{r}}_0$  используются для вычисления окончательной оценки в виде  $\hat{S}(x) = \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{r}}_0 + Q(x)\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{r}}$ .

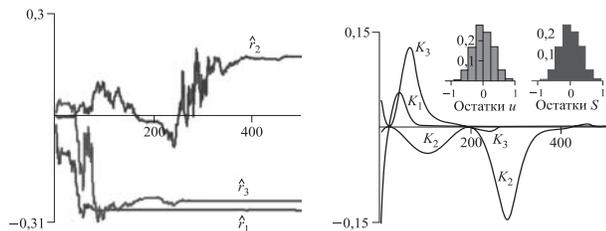


Рис. 6: Графики траекторий  $\hat{r}_j^{(n)}$  и  $K_{jn}$

Как отмечается в [9], оценка вычислительной сложности РНК-алгоритма составляет  $2,5m^2 + 4m$  арифметических операций на один шаг итерации ( $m$  – число коэффициентов полинома), т.е.

вычислительная сложность возрастает пропорционально квадрату порядка модели, что затруднительно для приложений в случае аппроксимации полиномами степени выше трех. В на-

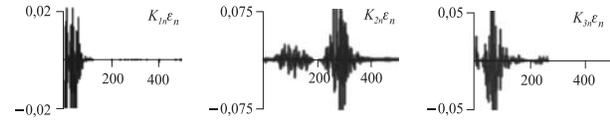


Рис. 7: Коррекция ошибок  $K_{jn}\epsilon_n$

шем примере путем редукции модель 6-го порядка приведена к модели с тремя неизвестными коэффициентами, и оценка ее вычислительной сложности, без учета операций, затраченных на трансформацию данных  $\tilde{f}_i \xrightarrow{\hat{r}_0} \tilde{u}_i$ , составляет  $2,5 \times 3^2 + 4 \times 3 \approx 35$  операций на один шаг против 114 для модели с 6-ю коэффициентами, т.е. число операций уменьшается более чем в 3 раза, что делает алгоритм пригодным для практических применений.

**Заключение.** Предложенный метод представления канонического полинома базисными элементами (МБЭ) повышает вычислительную эффективность алгоритмов полиномиальной аппроксимации функций и сглаживания экспериментальных данных. Идея МБЭ состоит в новом координатно-параметрическом представлении полинома тремя квадратичными ( $w_1, w_2, w_3$ ) и одной кубической ( $Q$ ) параболы – *базисными элементами*. Четыре базисных элемента определяются координатами четырех точек по специальному правилу сложного отношения и зависят от непрерывных параметров регулирования –  $\alpha, \beta, x_0$ .

Коэффициенты модели определяются по значениям  $f, f^{(i)}$ , а также по значениям базисных элементов и их производных. При полиномиальной аппроксимации функций метод использует меньший порядок производных по сравнению с формулой Тейлора, обеспечивает необходимую точность вычислений, и расширяет границы применения существующих методов обработки данных за счет:

- изменения конструкции полинома (модель);
- введения параметров регулирования (гибкость);
- трансформации данных (понижение сложности);
- сокращение числа коэффициентов полинома (редукция порядка модели);
- уменьшения числа обусловленности нормальной матрицы (устойчивость вычислений);
- возможности вычислений по параметрам (выбор режима) и др.

Перечисленные возможности метода подтверждены численными экспериментами путем срав-

нения МНК-результатов обработки для каждой модели, а также сравнением с результатами обработки одной и той же выборки данных методом МГК ("Гусеница").

Ключевой момент использования МБЭ на практике состоит в адекватном выборе параметров  $\alpha, \beta, x_0$ . Параметр сдвига  $x_0$  позволяет выбирать положение окна с данными, тогда как его ширина (база) определяется параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ , от которых зависят базисные элементы и их производные, влияющие на уровень подавления ошибок при трансформации данных и на точность аппроксимации. Вопрос оптимального выбора параметров в работе не обсуждается и пока остается открытым. Рекомендуется выбирать  $\alpha$  и  $\beta$  по разные стороны от  $x_0$  и вблизи границ промежутка (окна).

Автор выражает благодарность Ч. Тороку за полезные дискуссии по теме данной работы.

Работа выполнена при поддержке гранта Полномочного представителя Словакии в ОИЯИ.

### Список литературы

- [1] Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений, М.: Наука, 1970.
- [2] Дж. Себер. Линейный регрессионный анализ, М.: Мир, 1980.
- [3] Н.Д. Дикусар. Дискретные проективные преобразования на координатной плоскости. //Математическое моделирование, **10**, 3, 1991, с. 50-64.
- [4] N.D. Dikoussar. Function parametrization by using 4-point transforms, //Comput. Phys. Commun. **99**(1997), с. 235-254.
- [5] Н.Д. Дикусар. Метод базисных элементов в задачах полиномиальной аппроксимации и сглаживания. Препринт ОИЯИ, P11-2009-123, Дубна, (2009).
- [6] Н.Д. Дикусар, Ч. Торок. Автоматический поиск узлов для кусочно-кубической аппроксимации. //Математическое моделирование, **18**, 3, (2006), с. 23-40.
- [7] N.D. Dikoussar. Four-Point Transformation Methods in Approximation and the Smoothing Problems, //Physics of Particles and Nuclei Letters, 2008, Vol. **5**, No. 3, pp. 317-323.
- [8] F. Alexandrov, N. Golyandina. 5th St.Petersburg Workshop on Simulation, St.Peterb., June 2005. Proc. of the 5th St.Petersburg Workshop on Simulation. SPb.: 2005, pp. 45Ц50. ISBN5-9651-0102-3.
- [9] Б. Фридлиндер. Адаптивные алгоритмы для фильтров с конечной импульсной характеристикой. /Ред. К.Ф.Н. Коуэн, П.М. Грант. Адаптивные фильтры, М.: Мир, 1988, с. 45-81.