

# Моделирование токовых обмоток сложной конфигурации

П.Г. Акишин, А.А. Сапожников

e-mail: tsap@jinr.ru, Лаборатория информационных технологий ОИЯИ, Дубна

В работе рассматриваются вопросы моделирования токовых обмоток сложной конфигурации с различным сечением кабеля. Разработан удобный инструментарий для задания подобных обмоток. Обсуждаются проблемы, возникающие при вычислении магнитного поля от токовых элементов с использованием закона Био-Савара. Предлагаются численные методы, учитывающие сингулярность используемых интегральных уравнений.

## 1. Введение

При проектировании и эксплуатации различных физических установок возникает необходимость в изучении распределения генерируемых в устройствах электромагнитных полей. Учитывая высокую стоимость магнитных систем, одним из наиболее используемых инструментов для этих целей является компьютерное моделирование. Для проведения подобного моделирования создано большое число специализированных комплексов программ. моделирование магнитных систем предполагает решение большого числа вопросов. Прежде всего, это выбор соответствующей математической формулировки исходной задачи, проблема дискретизации непрерывной задачи, выбор метода решения возникающих линейных и нелинейных дискретизованных задач, оценка точности полученных решений, интерпретация полученных результатов, вычисление требуемых вторичных характеристик магнитного поля и т. д.

Метод конечных элементов (МКЭ) [1] является наиболее удобным математическим методом как для дискретизации линейных и нелинейных уравнений математической физики, так и для описания сложной геометрии электрофизических устройств. В качестве примера наиболее известных программных комплексов, базирующихся на методе конечных элементов, следует отметить ANSYS и Vector Fields [2,3]. Расчет трехмерных магнитных полей в электрофизических установках сложной конфигурации требует значительной подготовительной работы для представления входных данных моделируемой магнитной системы. Этот процесс предполагает описание геометрии как электромагнитных элементов конструкции, так и токовых обмоток. Одна из основных проблем моделирования магнитных систем в существующих программных комплексах является

в относительно ограниченном выборе возможностей для описания токовых обмоток. Это, как правило, набор упрощенных параметризованных моделей стандартных обмоток с прямоугольным сечением, таких как Solenoid, Racetrack, Bedstead и др. Моделирование более сложных обмоток вызывает значительные трудности.

Для создания магнитных систем ускорителей заряженных частиц в последнее время особенно популярны сверхпроводящие материалы. Эти материалы позволяют создать в ограниченном объеме магнитные поля высокой интенсивности. Однако при этом сверхпроводник должен быть охлажден до температуры, близкой к абсолютному нулю, что приводит к необходимости конструирования специальных криогенных систем. Одним из возможных вариантов решения возникающих проблем является использование коаксиального кабеля [4,5]. Принимая во внимание чрезвычайно высокие требования к качеству поля в ускорителях, при построении моделей приходится учитывать мельчайшие детали конструкций. Поэтому детальное описание конфигурации обмотки, в том числе учет сечения кабеля, является одним из необходимых условий качественного моделирования.

В данной работе мы ограничиваемся вопросами, связанными с моделированием токовых обмоток сложной формы, реализованными в программном комплексе. В качестве базовых элементов описания обмотки, как и в большинстве существующих подобных комплексах, используются 20-узловые конечные элементы. Предлагается инструментарий для описания стандартных и нестандартных токовых обмоток с различным поперечным сечением, включая востребованные в последнее время обмотки с коаксиальным сечением кабеля. Существует визуальный контроль на всех стадиях работы. Для вычисления магнитного поля используется закон Био-Савара. Для вычисления возникающих трехмерных, в общем случае сингулярных интегралов используются кубатурные формулы. Предлагаются математические методы корректного использования кубатурных формул в сингулярном случае.

## 2. Описание используемого подхода

Алгоритм конструирования обмотки состоит из двух шагов: задание токовой линии центра се-

чения обмотки и построение поперечного сечения кабеля [6]. Область токового элемента предполагается как след движения сечения проводника вдоль центральной токовой линии. Отметим, что плоскость сечения проводника в каждой точке центральной токовой линии перпендикулярна касательной к линии в этой точке. Для описания токовых элементов используются 20-узловые конечные элементы серендипова типа. Существует специализированный экраный редактор задания входных данных с возможностями визуализации на каждом этапе работы. В качестве макросов описания центральной токовой линии используются отрезки прямых линий и дуги окружностей. Пользователь должен задать набор элементов описания центральной токовой линии. Отрезок прямой задается координатами начальной и конечной точки, а также числом слоев, на которые разбивается обмотка при аппроксимации конечными элементами вдоль этого отрезка. Дуга окружности задается начальной и конечной точками, центром окружности и числом частей разбиения дуги. Предполагается, что ток движется в положительном направлении от начальной точки к конечной по дуге окружности с заданным центром, лежащей в плоскости, проходящей через эти три точки. После задания центральной токовой линии необходимо выбрать сечение обмотки, координаты центра обмотки в пространстве, поворот системы координат и т.д. Для построения сечения произвольной формы создан специальный редактор сечения кабеля. Основными параметрами обмотки общего вида являются: координаты центра системы координат; углы поворота системы координат (углы Эйлера); суммарный ток, проходящий через сечение. Созданы параметризованные модели задания входных данных для наиболее распространенных типов обмоток для различных сечений кабеля.

Все данные, полученные в процессе конструирования обмотки, записываются в файл и могут быть использованы в дальнейших вычислениях.

### 3. Вычисление магнитного поля

В этом разделе мы рассмотрим вопросы, связанные с вычислением поля от токовых обмоток. Для вычисления магнитного поля от токовых обмоток  $\vec{H}^S(\vec{a})$  используется закон Био-Савара [7]:

$$\vec{H}^S(\vec{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left[ \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}_i^S(\vec{x}) \right] dV_x, \quad (1)$$

где  $\{\Omega_i, i = 1, N\}$  – токовые элементы обмоток;  $\vec{J}_i^S(\vec{x})$  – плотность тока в  $i$ -ом элементе,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума. Сложности при

использовании данного подхода связаны, прежде всего, с наличием сингулярности под знаком интеграла. В некоторых специальных случаях интеграл (1) удается взять аналитически, но в общем случае для его вычисления используются кубатурные формулы. Рассмотрим подробнее один из возможных методов вычисления интеграла (1). В дальнейшем мы будем ориентироваться на вычисления магнитного поля от токовых элементов, используемых для аппроксимации обмотки из предыдущего раздела.

Пусть  $\{\Omega_i\}$  есть набор токовых элементов,  $\{P_i\}$  – вершины серендипова элемента  $Q_i$ . Тогда для любого  $(\alpha, \beta, \gamma)^T$  из единичного куба  $U = \{[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]\}$  мы ставим в соответствие вектор  $\vec{x}$ :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{20} \vec{P}_i f_i(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2)$$

где  $\{f_i(\alpha, \beta, \gamma)\}$  – функции формы 20-узлового серендипова элемента [1]. Далее мы будем предполагать, что линия тока проходит вдоль кривой при фиксированных  $\alpha, \beta$ . При рассмотрении идеальных токовых элементов в предыдущем разделе мы сохраняли площадь поперечного сечения, перпендикулярного центральной линии тока, что позволяет использовать постоянную плотность тока при расчетах. Однако использование 20-узловых серендиповых элементов для аппроксимации обмотки сохраняет поперечное сечение только приближенно. Для простоты дальнейшего изложения мы будем рассматривать идеальный случай. Пусть  $\vec{E}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha}$  и  $\vec{E}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta}$  есть производные вектора  $\vec{x}$  по  $\alpha, \beta$ . Определим вектор направления плотности тока  $\vec{J}^S$  как нормированное векторное произведение  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ : суммарного тока через элемент к площади поперечного сечения. Тогда вклад одного  $i$ -ого элемента в итоговое поле можно записать в виде:

$$\vec{I}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{Q_i} \frac{[\vec{J}^S \times (\vec{x} - \vec{a})]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^3} \cdot Crd \cdot dV_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_U \frac{[\vec{J}^S \times (\vec{x} - \vec{a})]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^3} \cdot Crd \cdot D \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot d\gamma, \quad (3)$$

где  $D$  – якобиан преобразования и вектор  $\vec{x}$  есть  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ . Следует отметить, что выражение, стоящее под знаком интеграла в (3), имеет сложную нелинейную структуру по переменным интегрирования. Получить точные аналитические формулы для этого интеграла удается в исключительных случаях. Поэтому наиболее предпочтительно для приближенного вычисления этого интеграла использовать кубатурные

формулы. Однако сам интеграл имеет сингулярную интегрируемую особенность. Поэтому прямое применение кубатурных формул может привести к большим вычислительным ошибкам. Для облегчения вычисления данного интеграла предлагается следующий прием. Пусть  $\alpha_a, \beta_a, \gamma_a$  есть решение уравнения

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{20} \vec{P}_i f_i(\alpha_a, \beta_a, \gamma_a). \quad (4)$$

Для решения этой нелинейной по  $\alpha_a, \beta_a, \gamma_a$  задачи используется метод ньютона. Определим вектор  $\vec{J}^a$  как формальное обобщение  $\vec{J}^S$  для  $\vec{x} = \vec{a}$ . Пусть  $[A]$  есть матрица производных компонент вектора  $\vec{J}^S$  по  $x_1, x_2, x_3$  ( $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ) в точке  $\vec{a}$ . Представим интеграл  $\vec{I}_i$  из (3) в виде суммы двух интегралов

$$\vec{I}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_U \frac{[d\vec{J} \times (\vec{x} - \vec{a})]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^3} \cdot Crd \cdot D \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot d\gamma, \quad (5)$$

$$\vec{I}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Q_i} \frac{[(\vec{J}^a + [A](\vec{x} - \vec{a})) \times (\vec{x} - \vec{a})]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^3} \cdot Crd \cdot dV_x. \quad (6)$$

Отметим, что в случае принадлежности точки  $\vec{a}$  элементу, подынтегральное выражение в (5) ограничено. Для интеграла из (6) имеем:

$$\vec{I}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Q_i} Rot_x \left( \frac{\vec{J}^a + [A](\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \right) \cdot Crd \cdot dV_x - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Q_i} \frac{Rot_x(\vec{J}^a + [A](\vec{x} - \vec{a}))}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \cdot Crd \cdot dV_x \quad (7)$$

Используя интегральные теоремы, получаем:

$$\vec{I}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\partial Q_i} \frac{d\vec{S} \times (\vec{J}^a + [A](\vec{x} - \vec{a}))}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \cdot Crd - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Q_i} \frac{\vec{e}_0}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \cdot Crd \cdot dV_x, \quad (8)$$

где  $\vec{e}_0$ - постоянный вектор:  $\vec{e}_0 = ((a_{3,2} - a_{2,3}), (a_{1,3} - a_{3,1}), (a_{2,1} - a_{1,2}))^T$ . здесь  $\{a_{i,j}\}$  есть элементы матрицы  $[A]$ . Используя тождество для оператора Лапласа

$$\Delta_x \|\vec{x} - \vec{a}\| = \frac{2}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}. \quad (9)$$

и интегральные теоремы, получаем:

$$\vec{I}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\partial Q_i} \frac{[d\vec{S}_x \times \vec{J}^a]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \cdot Crd +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\partial Q_i} \frac{[d\vec{S}_x \times ([A](\vec{x} - \vec{a}))]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \cdot Crd - \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{e}_0 \cdot Crd \cdot \oiint_{\partial Q_i} \frac{(d\vec{S}_x, (\vec{x} - \vec{a}))}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}. \quad (10)$$

Таким образом, мы свели исходный интеграл  $\vec{I}_i$  из (3) к сумме объемного интеграла с ограниченным подынтегральным выражением и трех поверхностных, для двух из которых выражение под интегралом также ограничено.

Рассмотрим возможные подходы для вычисления интеграла с неограниченной в общем случае подынтегральной функцией:

$$\vec{I}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\partial Q_i} \frac{[d\vec{S}_x \times \vec{J}^a]}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}. \quad (11)$$

Отметим, что граница  $\{\partial\Omega_i\}$  состоит из 6 образов различных граней единичного куба. Рассмотрим одну из граней. Пусть  $\{\vec{P}_i\}$  есть вершины соответствующей грани серендипова элемента  $Q_i$ . Для простоты мы рассмотрим грань, соответствующую  $\gamma = \gamma_0 = 0$ . Тогда любая точка  $\vec{x}$  из грани может быть представлена в виде:  $\vec{x}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^6 \vec{P}_i f_i(\alpha, \beta, \gamma_0)$ . Пусть  $\vec{E}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha}$ ,  $\vec{E}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta}$ ,  $\vec{n}_x = \frac{[\vec{E}_1 \times \vec{E}_2]}{\|\vec{E}_1 \times \vec{E}_2\|}$ ,  $\det = \|\vec{E}_1 \times \vec{E}_2\|$ , тогда интеграл из (10) для этой грани можно записать в виде:

$$\vec{I}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{[\vec{n}_x \times \vec{J}^a]}{\|\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma_0) - \vec{a}\|} \cdot \det d\alpha \cdot d\beta \quad (12)$$

Пусть вектор  $\vec{n}_a = \vec{n}_x$  из (4) и  $\det_a$  соответствуют случаю  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ , удовлетворяющих (4). Получаем:

$$\vec{I}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{([\vec{n}_x \times \vec{J}^a] \cdot \det - [\vec{n}_a \times \vec{J}^a] \cdot \det_a)}{\|\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma_0) - \vec{a}\|} d\alpha \cdot d\beta + \frac{\mu_0}{4\pi} [\vec{n}_a \times \vec{J}^a] \cdot \det_a \cdot \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\|\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma_0) - \vec{a}\|}. \quad (13)$$

Выражение в первом интеграле в (13) ограничено и может быть вычислено с использованием кубатурных формул для квадрата.

Для второго интеграла используем следующий прием. Пусть  $[D]$  есть матрица производных компонент вектора  $\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma)$  по  $\alpha, \beta, \gamma$  для

$\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$  из (4). Тогда второй интеграл  $\vec{I}_4$  из (13) можно представить:

$$\begin{aligned} \vec{I}_4 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\|\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma_0) - \vec{a}\|} = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{\|\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma_0) - \vec{a}\|} - \frac{1}{\|[D]\vec{d}_a\|} \right) d\alpha \cdot d\beta + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\|[D]\vec{d}_a\|}, \end{aligned} \quad (14)$$

где вектор  $\vec{d}_a = (\alpha - \alpha_a, \beta - \beta_a, \gamma - \gamma_a)^T$ . Выражение под первым интегралом в правой части (14) ограничено и может быть посчитано по кубатурным формулам. Второй интеграл может быть вычислен аналитически. Отметим, что данная методика должна использоваться только в существенно сингулярном случае.

В ситуации, когда точка  $\vec{a}$  удалена от токового элемента, для вычисления интеграла из (3) можно прямо использовать кубатурные формулы для единичного куба.

## Заключение

В работе дается описание подхода для моделирования токовых обмоток с различным поперечным сечением, включая востребованные в последнее время обмотки с коаксиальным сечением

кабеля. Существует визуальный контроль на всех стадиях работы. В рамках закона Био-Савара предложены приближенные методы вычисления магнитного поля от токовых обмоток, учитывающие сингулярность подынтегральных выражений. Следует подчеркнуть, что в рамках данного подхода разработаны алгоритмы описания обмоток для коаксиального кабеля, что очень важно для моделирования сверхпроводящих магнитов, использующих проводники с внутренним охлаждением.

## Список литературы

- [1] O.C. Zienkiewicz. The finite element method in engineering science. McGraw-hill. London, 1971.
- [2] <http://www.ansys.com/>
- [3] <http://www.vectorfields.com/>
- [4] E. Fischer and et. al. Full size model manufacturing and advanced design status of the SIS100 main magnets. WAMSDO at CERN, June 2008.
- [5] An International Acelerator Facility for Beams of Ions and Antiprotons; <http://www.gsi.de/fair/>
- [6] П.Г. Акишин, А.А. Сапожников, З.Э. Фишер, П.Б. Шницер. Автоматический генератор пространственных сеток. P11-2008-149, ОИЯИ, Дубна, 2008.
- [7] Л.Д. Ландау, В.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М.: наука, 1992.