

# Объемные интегральные уравнения магнитостатики с линейной конечно-элементной аппроксимацией намагниченности

П.Г. Акишин, А.А. Сапожников

Лаборатория информационных технологий ОИЯИ, Дубна

## Введение

В работе рассматриваются вопросы применения метода объемных интегральных уравнений для расчета магнитных систем. В пакете программ GFUN /1/, использующем интегральную постановку задачи магнитостатики, для дискретизации уравнений используются метод коллокаций и кусочно-постоянная аппроксимация неизвестных в пределах элемента разбиения области. Ограниченность применимости этого подхода связана с сингулярностью ядра интегральных уравнений. В данной работе для дискретизации рассматривается альтернативный методу коллокаций подход, в котором точка наблюдения заменяется интегрированием по элементу разбиения /2/. Это позволяет использовать приближения для неизвестных более высокого порядка. Основные идеи метода в работе иллюстрируются на примере кусочно-линейной аппроксимации неизвестных. Данный подход позволяет построить дискретизацию исходных объемных интегральных уравнений с использованием не только линейных элементов, но и с элементами более высокого порядка точности. В работе обсуждаются вопросы вычисления матричных элементов, методы решения возникающих нелинейных систем уравнений, а также приводится сравнение результатов моделирования дипольного магнита с использованием различных вариантов дискретизации интегральной постановки задачи магнитостатики.

## 1. Интегральные постановки задачи магнитостатики

Пусть  $\vec{H}(\vec{a})$ ,  $\vec{B}(\vec{a})$ ,  $\vec{M}(\vec{a})$  есть напряженность, индукция и намагниченность магнитного поля в точке  $\vec{a}$ .

Имеет место следующее интегральное уравнение:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) + \nabla_{\vec{a}}\phi(\vec{a}), \quad (1)$$

$$\phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \left( \vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) dv_{\vec{x}}, \quad (2)$$

где  $\vec{H}^s(\vec{a})$  – поле от токовых обмоток,  $G$  – область, заполненная ферромагнетиком.

Величины  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{M}$  связаны следующими нелинейными соотношениями:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \frac{\vec{B}(\vec{a})}{\mu(|\vec{B}(\vec{a})|)\mu_0}, \quad (3)$$

$$\vec{M}(\vec{a}) = \frac{\vec{B}(\vec{a})}{\mu_0} - \vec{H}(\vec{a}), \quad (4)$$

где  $\mu_0$  – абсолютная магнитная проницаемость вакуума,  $\mu(x)$  – магнитная проницаемость.

## 2. Кусочно-линейная аппроксимация намагниченности

Для дискретизации системы уравнений (1),(2) в работе /1/ используется метод коллокаций и кусочно-постоянная аппроксимация намагниченности в пределах элемента разбиения. В данном параграфе мы рассмотрим альтернативный методу коллокаций подход, в котором точка наблюдения заменяется интегрированием по элементу разбиения. Усреднение по элементу позволяет решить проблему расходимости интегралов, которая возникает при вычислении матричных коэффициентов при аппроксимации намагниченности конечными элементами, отличными от постоянных.

Рассмотрим дискретизацию интегральных уравнений магнитостатики, использующую метод конечных элементов с линейной аппроксимацией намагниченности в пределах объемного элемента.

Для этого будем предполагать, что область можно приблизить объединением тетраэдров:

$$G = \bigcup_{i=1}^N S_i.$$

Также будем предполагать, что объединение тетраэдров  $\{S_i\}$  удовлетворяет требованиям метода конечных элементов. Пусть  $\vec{P}_k$ ,  $k = 1, \dots, L$  – набор всех вершин тетраэдров  $\{S_i\}$ . Обозначим  $\vec{H}(\vec{P}_k) = \vec{H}_k$ ,  $\vec{M}(\vec{P}_k) = \vec{M}_k$ ,  $\vec{B}(\vec{P}_k) = \vec{B}_k$ . Пусть  $f_k(\vec{x})$  – линейная функция формы, ассоциированная с вершиной  $\vec{P}_k$ .

Используя эти обозначения, имеем для  $i = \overline{1, L}$ :

$$\sum_{j=1}^L \int_G f_i(\vec{a}) f_j(\vec{a}) \vec{H}_j dv_{\vec{a}} = \int_G f_i(\vec{a}) \vec{H}^s(\vec{a}) dv_{\vec{a}} + \sum_{j=1}^L \int_G f_i(\vec{a}) \nabla_{\vec{a}} \psi_j(\vec{a}) dv_{\vec{a}}, \quad (5)$$

где  $\psi_j(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \left( f_j(\bar{x}) \bar{M}_j, \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}}$ .

Пусть матрицы  $[C]$  и  $[A]$  есть матрицы размерности  $[3L \times 3L]$  вида:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & \cdots & [C_{1L}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [C_{L1}] & \cdots & [C_{LL}] \end{bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & \cdots & [A_{1L}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{L1}] & \cdots & [A_{LL}] \end{bmatrix},$$

где  $[C_{ij}]$  – диагональная матрица вида:

$$[C_{ij}] = \int_G f_i(\bar{a}) f_j(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$[A_{ij}]$  есть матрица размерности  $[3 \times 3]$ , такая, что для любого постоянного вектора  $\bar{M}$  справедливо соотношение:

$$[A_{ij}] \bar{M} = \int_G f_i(\bar{a}) \nabla_a \hat{\psi}_j(\bar{a}) dv_{\bar{a}}, \quad (6)$$

где

$$\hat{\psi}_j(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_G f_j(\bar{x}) \left( \bar{M}, \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}}.$$

Пусть

$$\hat{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_L)^T,$$

$$\hat{M}(\hat{B}) = \mu_0 (\bar{M}(\bar{B}_1), \bar{M}(\bar{B}_2), \dots, \bar{M}(\bar{B}_L))^T,$$

$$\hat{H}^s = \mu_0 \left( \int_G f_1(\bar{a}) \bar{H}^s(\bar{a}) dv_{\bar{a}}, \dots, \int_G f_L(\bar{a}) \bar{H}^s(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \right)^T.$$

Учитывая (3) и (4), систему (5) можно записать в виде:

$$[C] \hat{B} = \hat{H}^s + ([A] + [C]) \hat{M}(\hat{B}). \quad (7)$$

### 3. Итерационные методы решения нелинейных задач

Основная трудность реализации кусочно-линейной дискретизации (5) связана с вычислением большого числа шестикратных, в общем случае, сингулярных интегралов. Для упрощения объемные интегралы из (6) сводились к поверхностным интегралам. В регулярном случае для их вычисления использовались кубатурные формулы. В сингулярном случае с помощью метода однородных функций из /2/ эти интегралы сводились к суперпозиции регулярных интегралов меньшей кратности, для вычисления которых также использовались

кубатурные формулы. Для решения дискретизованных систем уравнений (5) использовался следующий итерационный процесс /3/:

$$[C] \hat{B}_{k+1} = \hat{H}^s + ([A] + [C]) \hat{M}(\hat{B}_k), \quad (8)$$

где  $k = 0, 1, \dots$ , а начальное приближение  $\hat{B}_0 = \bar{0}$ .

Итерационный процесс заканчивался, когда невязка уравнений (5) становилась меньше наперед заданного числа  $\varepsilon$ . Для решения линейной системы уравнений вида  $[C] \bar{x} = \bar{y}$  использовался метод неполного разложения Холецкого в сочетании с методом сопряженных градиентов /4/.

### 4. Результаты моделирования

Рассмотренные подходы дискретизации объемных интегральных уравнений использовались для моделирования дипольного магнита эксперимента СВМ (GSI, Дармштадт). На Рис. 1 приведено разбиение половины магнита на тетраэдры. В расчетах учитывалась дипольная симметрия поля, которая позволила сократить в 8 раз число неизвестных. Восьмая часть магнита разбивалась на 3959 тетраэдров, общее число вершин которых равнялось 1112.

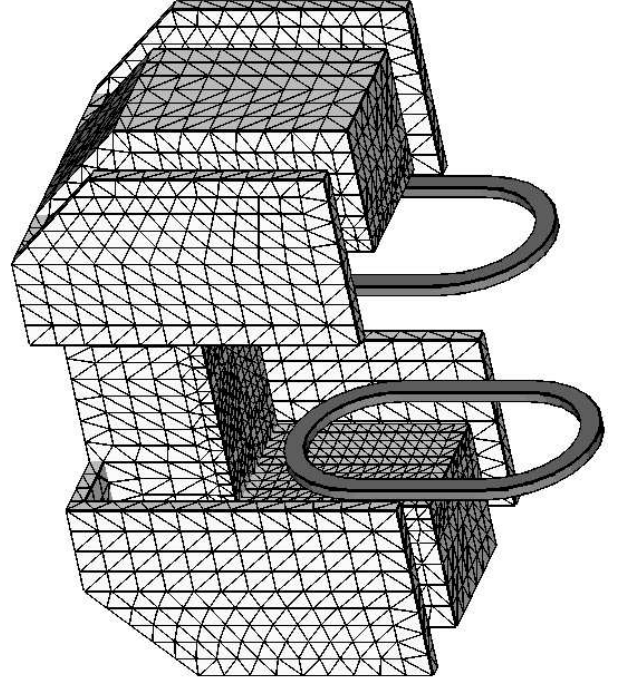


Рис. 1: Разбиение половины магнита на тетраэдры.

На Рис. 2 приведено распределение компоненты поля  $B_y$  вдоль оси магнита. Результаты расчетов, использующие метод коллокаций, обозначены кривой 2. Результаты, базирующиеся на дискретизации (5), соответствуют кривой 1.

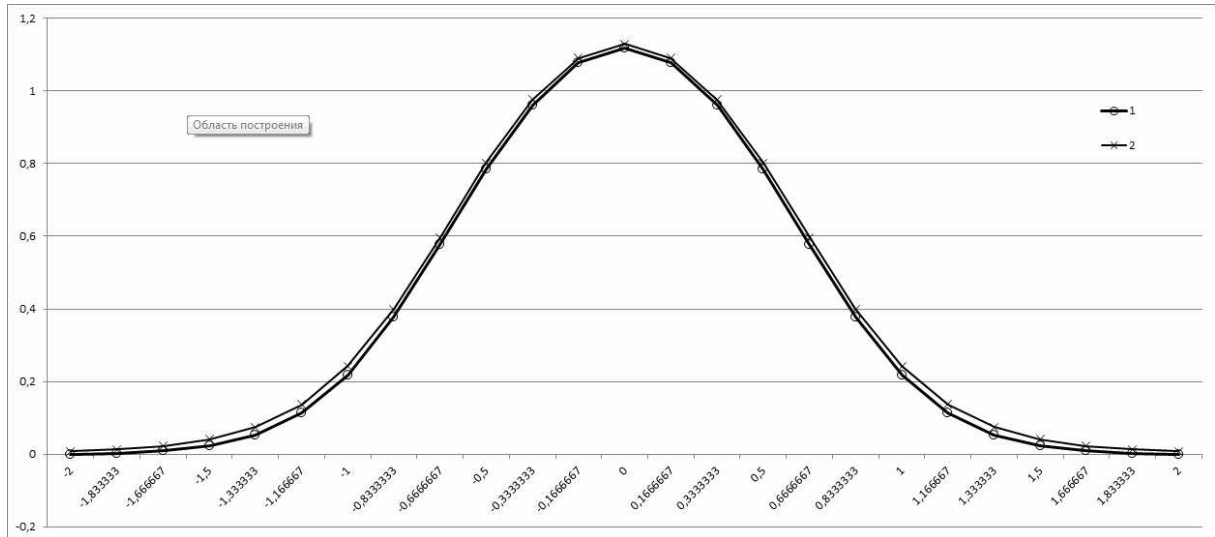


Рис. 2: Распределение  $B_y$  компоненты поля вдоль оси магнита.

### Список литературы

- [1] Armstrong A.G. e. a. GFUN3D User Guide. RL-76-029/A, 1976.
- [2] Акишин П.Г. Метод интегральных уравнений в задачах магнитостатики: Автореф. дис. канд. физ.мат. наук. ОИЯИ, 11-83-558, Дубна, 1983.
- [3] Pasciak J.E. An Iterative Algorithm for the Volume Integral Method for Magnetostatics Problems. Comp. Maths. with Appls., Vol. 8, №8, pp. 283-290, 1982.
- [4] I.Meijerink JA., van der Vorst H.A. An iterative solution method for linear systems, of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix // Math. Comput. 1977. V. 31. №137. pp. 148-162.