

Применение непрерывного аналога метода Ньютона в задачах динамики пучков

Р.В. Полякова, И.П. Юдин

Лаборатория информационных технологий ОИЯИ, Дубна

Аннотация. Дано описание моделирования нелинейных задач динамики частиц ускорителей с использованием численных алгоритмов на базе непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН). Приводятся результаты численного моделирования двух задач для ускорителей: 1) расчет системы транспортировки при быстром выводе пучка на ускорителях, 2) оптимизация длинных согласованных промежутков ускорителя и анализ нелинейных аббераций в них.

НАМН, предлагаемый в данной работе для решения первой задачи, позволяет оптимальным образом подобрать параметры элементов систем транспортировки и произвести их расстановку, а также сделать оценку допусков на эти параметры. Во второй задаче было проведено исследование нелинейных аббераций в квадрупольных линзах “невидимого” промежутка ускорителя и согласование его с учетом этих нелинейностей.

Введение. Создание новых ускорителей и реконструкция действующих требует решения нелинейных задач, математическое моделирование которых приводит к важным и интересным математическим задачам. Многие из них являются настолько сложными нелинейными задачами, в том числе и обратными, что единственная возможность исследования их состоит в разработке численных алгоритмов и реализации последних на персональном компьютере. К указанным проблемам относится, в частности, задача определения оптимальных (в смысле каких-либо критериев качества) параметров P_i систем транспортировки заряженных частиц с учетом разного рода нелинейных эффектов, расчет согласованных “невидимых” прямолинейных промежутков ускорителя. Все выше названные физические проблемы математически сводятся к решению краевой задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Подробное описание численного метода и алгоритма НАМН математического моделирования физических задач дано в работах [1-3].

1. Физическая постановка задачи. На рис. 1 приведена модель системы транспортировки заряженных частиц с выбранной системой координат.

На рис. 2 приведен один из возможных вариантов структуры “невидимого” промежутка. Физическая задача транспортировки заряжен-

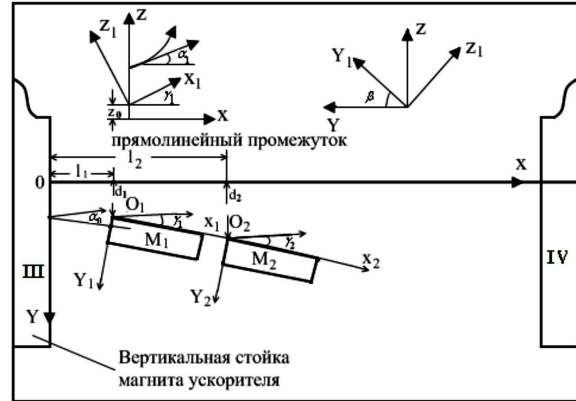


Рис. 1: Схема системы транспортировки.

ных частиц ставится следующим образом. Задаются направление и координаты пучка заряженных частиц на входе транспортной системы - $(\alpha_0, \alpha_{0\perp}, s_0, x_0, y_0)$, (s_0, x_0, y_0) – координаты начальной точки траектории в прямоугольной системе координат физической установки, α_0 – угол в радианах между касательной к проекции траектории в точке (s_0, x_0, y_0) на плоскость “SX” и осью “S”; $\alpha_{0\perp}$ – угол в радианах между касательной к проекции траектории в точке (s_0, x_0, y_0) на плоскость “SY” и осью “S”. Необходимо подобрать параметры $(P_1, P_2, P_3 \dots;)$ так, чтобы по заданному начальному положению и направлению частицы получить ее заданное конечное положение и направление - $(\alpha_k, \alpha_{k\perp}, s_k, x_k, y_k)$, (s_k, x_k, y_k) – координаты конечной точки траектории в прямоугольной системе координат физической установки, α_k и $\alpha_{k\perp}$ тоже, что и α_0 и $\alpha_{0\perp}$ соответственно в точке (s_k, x_k, y_k) .

2. Математическая постановка задачи. Движение заряженных частиц в магнитном поле описывается полными уравнениями в прямоугольной системе координат:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{A}{B_0 R_0} \varphi(s, x, y, x'_s, y'_s, B_s, B_x, B_y, P_i) \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{A}{B_0 R_0} \psi(s, x, y, x'_s, y'_s, B_s, B_x, B_y, P_i) \end{cases} \quad (1)$$

где $B_0 R_0$ – магнитная жесткость частицы и $\frac{1}{B_0 R_0} = \frac{e}{p}$, p – импульс частицы, $A = \sqrt{1 + (x'_s)^2 + (y'_s)^2}$, P_i – параметры, физический и математический смысл которых в каждом кон-

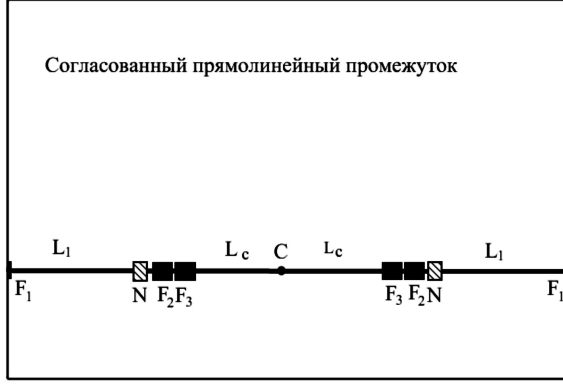


Рис. 2: Структура “невидимого” прямолинейного промежутка с нелинейными корректирующими элементами

кретном случае определен. Компоненты поля $B(B_s, B_x, B_y)$ в каждом конкретном физическом случае определяются аналитически или численным путем, если поле задано в виде таблицы. Величины B_s, B_x, B_y являются нелинейными функциями от (s, x, y) и могут также зависеть от параметров P_i .

Запишем краевые условия:

$$\begin{cases} x(s_0, P_i) = x_0, & x'_s(s_0, P_i) = \operatorname{tg} \alpha_0, \\ y(s_0, P_i) = y_0, & y'_s(s_0, P_i) = \operatorname{tg} \alpha_{0\perp}, \\ x(s_k, P_i) = x_k = a, & x'_s(s_k, P_i) = \operatorname{tg} \alpha_k = c, \\ y(s_k, P_i) = y_k = b, & y'_s(s_k, P_i) = \operatorname{tg} \alpha_{k\perp} = d. \end{cases} \quad (2)$$

3. Метод решения краевой задачи (1, 2).

Систему уравнений (1) сводим к системе уравнений 1-го порядка заменой: $x'_s = x_1$ и $y'_s = y_1$:

$$\begin{cases} (x_1)'_s = \frac{A}{B_0 R_0} \varphi(s, x, y, x_1, y_1, B_y, P_i) \\ (y_1)'_s = \frac{A}{B_0 R_0} \psi(s, x, y, x_1, y_1, B_y, P_i) \\ x'_s = x_1 \\ y'_s = y_1 \end{cases} \quad (3)$$

Математически краевая задача формулируется следующим образом: необходимо подобрать параметры P_i так, чтобы траектория движения заряженных частиц удовлетворяла уравнениям (3) и следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} x(s_k, P_i) = x_k(P_i) = a, \\ y(s_k, P_i) = y_k(P_i) = b, \\ x_1(s_k, P_i) = x_{1k}(P_i) = c, \\ y_1(s_k, P_i) = y_{1k}(P_i) = d. \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} f_1(s_k, P_i) = x_k(s_k, P_i) - a = 0, \\ f_2(s_k, P_i) = y_k(s_k, P_i) - b = 0, \\ f_3(s_k, P_i) = x_{1k}(s_k, P_i) - c = 0, \\ f_4(s_k, P_i) = y_{1k}(s_k, P_i) - d = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Получена система 4-х уравнений, из которой можно одновременно определить четыре параметра P_i , $i = 1 \div 4$. Выполнение краевых условий (4) достигается при варьировании этих параметров. Систему уравнений (4) будем решать методом введения параметра t , считая, что P_i есть функции от t , т.е. $P_i = P_i(t)$.

На основании данного метода имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_1(s_k, P_i) = -f_1(s_k, P_i), \\ \frac{\partial}{\partial t} f_2(s_k, P_i) = -f_2(s_k, P_i), \\ \frac{\partial}{\partial t} f_3(s_k, P_i) = -f_3(s_k, P_i), \\ \frac{\partial}{\partial t} f_4(s_k, P_i) = -f_4(s_k, P_i) \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 (x_k)'_{P_i} P'_{it} = -(x_k - a), \\ \sum_{i=1}^4 (y_k)'_{P_i} P'_{it} = -(y_k - b), \\ \sum_{i=1}^4 (x'_k)'_{P_i} P'_{it} = -(x'_k - c), \\ \sum_{i=1}^4 (y'_k)'_{P_i} P'_{it} = -(y'_k - d), \end{cases} \quad (5)$$

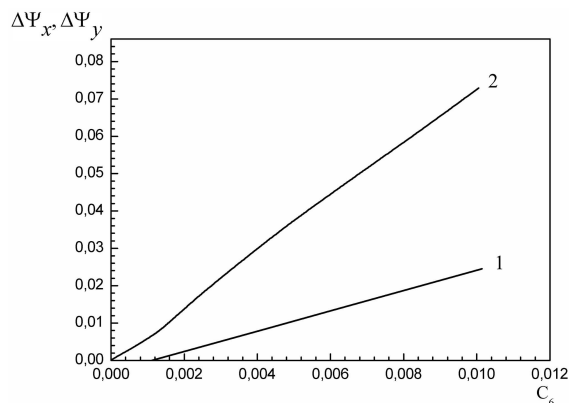
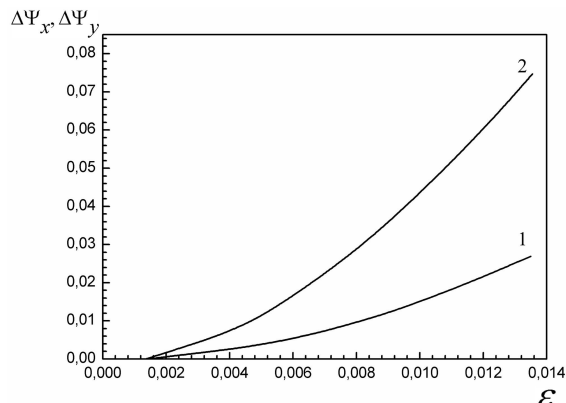
Из системы уравнений (5) определяем P'_{it} , $i = 1 \div 4$. Затем, используя формулу $P'_{it} = \frac{P_i(t+\Delta t) - P_i(t)}{\Delta t}$, где Δt – шаг по переменной t , получаем значения параметров P_i на следующем шаге по t : $P_i(t + \Delta t) = P_i(t) + P'_{it} \Delta t$. Значения $P_i(t_0)$ – заданы (начальное приближение для $t_0 = 0$). Таким образом, нахождение искомых параметров производится методом итераций и может быть осуществлено с заданной точностью.

4. Применение описанного метода к некоторым физическим задачам.

Задача 1. Расчет системы транспортировки. Предполагалось, что в систему транспортировки входят два поворотных магнита (см. рис.1). Положение магнитов в пространстве определялось следующими параметрами: d_1, d_2 – расстояние центров магнитов от оси “S”; l_1, l_2 – расстояние центров магнитов от оси “X”; γ_1, γ_2 – горизонтальные углы разворота магнитов

Таблица.

| d_1 (м) | d_2 (м) | B_1 (Т) | B_2 (Т) | y (м) | $\text{tg } \alpha$ (рад) |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------------|
| 0,55 | 0,77 | -0,0100 | -0,0099 | 1,434899 | 0,2573 |
| 0,55 | 0,77 | -0,0099 | -0,0099 | 1,433140 | 0,2569 |
| 0,55 | 0,77 | -0,0099 | -0,0100 | 1,433640 | 0,2573 |
| 0,55 | 0,77 | -0,0099 | -0,0099 | 1,433730 | 0,2610 |
| 0,55 | 0,77 | -0,0099 | -0,0099 | 1,436530 | 0,2600 |

Рис. 3: Зависимость набег фаз $\Delta\psi_x(1)$ и $\Delta\psi_y(2)$ от величины додекаполюльной нелинейностиРис. 4: Зависимость набег фаз $\Delta\psi_x(1)$ и $\Delta\psi_y(2)$ от величины эмиттанса пучка для $c_6 = 1\%$

относительно оси “Y”; $\gamma_{1\perp}, \gamma_{2\perp}$ – вертикальные углы разворота магнитов относительно оси “X”; β_1, β_2 – вертикальные углы разворота магнитов относительно оси “S”. В качестве варьируемых параметров брались комбинации по четыре параметра, куда обязательно входили индукции магнитов B_1 и B_2 . В таблице приведены координаты и углы пучка на выходе системы в зависимости от изменения выбранных параметров $P_1 = B_1, P_2 = B_2, P_3 = d_1, P_4 = d_2$.

Задача 2. Оптимизация длинных согласованных промежутков ускорителя.

В современных жесткофокусирующих ускорителях организация системы ввода-вывода пучка, размещение ускоряющей станции и т.д. требует длинных свободных промежутков (см. рис.2). Вторая физическая задача была посвящена исследованию нелинейных aberrаций в квадрупольных линзах такого промежутка и согласованию его с учетом этих нелинейностей. Расчеты свободного промежутка проводились с учетом нелинейных эффектов в линзах с использованием выше описанной методики. В качестве варьируемых параметров брались градиенты линз (G_1, G_2, G_3), их длины (l_1, l_2, l_3), а также пространства дрейфа (L_1, L_2, L_3). Численные эксперименты показали, что наилучшее согласование дает так называемое “нелинейное” согласование, которое достигается путем введения в структуру промежутка нелинейных корректирующих

элементов с величинами: $G_N = -4,643$ Т/м, $l_N = 0,132$ м, $L_N = 0,100$ м. Набеги фаз для “нелинейно” согласованного промежутка в зависимости от эмиттанса пучка приведены на рис. 3, 4. Из этих рисунков видно, что “нелинейное” согласование примерно на порядок уменьшает вызванный нелинейностями в линзах набег фаз на промежутке.

Заключение. Предложен общий подход к решению задач транспортировки заряженных частиц, согласования прямолинейных промежутков, в основу которого положен непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН). Развитый метод эффективен для решения описанных модельных краевых задач, связанных с конструированием ускорительных систем, что сохраняет и время и стоимость их создания.

Список литературы

- [1] Жидков Е.П., Пузынин И.В. и др.: Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики, ЭЧАЯ, т.4, вып.1, 1973.
- [2] Полякова Р.В., Юдин И.П.: CONTINUOUS ANALOGUE OF NEWTON METHOD IN BEAM DYNAMICS PROBLEMS, Вестник РУДН $\epsilon 2$, 2011 г, стр. 76-84.
- [3] Полякова Р.В., Юдин И.П.: Математическое моделирование нелинейных задач динамики частиц в ускорителе с помощью Непрерывного Аналога Метода Ньютона, в тезисах конференции МКО, Пущино, январь 2013 г.